

# 日本経済学会2010年度春季大会チュートリアルセッション（日本学術会議 数量的経済・政策分析分科会との共催）

## 「動学的マクロモデルの計量分析」

2010年6月5日

### (1) DSGEモデルの概要

藤原一平（日本銀行金融市場局）

### (2) DSGEおよびDSGE-VARモデルのMCMCベイズ分析

渡部敏明（一橋大学経済研究所）



# 動学的マクロモデルの計量分析

## (1) DSGEモデルの概要

日本銀行・金融市場局

藤原 一平

本稿に示された内容は、筆者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。



# 報告の構成

- イン트로ダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題



- イン트로ダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題



# 報告の目的

- 中央銀行等の政策機関では、確率的動学一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium: DSGE) モデルを用いた経済予測、および、政策シミュレーションが、頻繁に行われている。
- 本報告の目的は、DSGEモデルの概要(すなわち、モデルの導出と解法)を理解すること。
- きわめて単純なモデルから、現実説明力の高い Christiano, Eichenbaum and Evans (JPE2005) モデルまでをフォロー。



# マクロモデルの歴史

- ケインズ(ヒックス)のIS-LMモデル
- クラインによる大型ケインジアン・モデル
- DSGEモデル
  - リアル・ビジネス・サイクル・モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル



# アカウントティング・ツールとしての の理論モデル

- 全ての理論モデルは以下で表現可能。

「現在の変数」

$$= A \times \text{「説明変数」} + B \times \text{「期待変数」} + \text{「ショック」}$$

- ①パラメーター(A,B)選択、②期待の評価、③ショックの評価(説明変数選択)、のいずれかでどんな変数も説明できる。
- マクロ理論は、変数の動きを、①、②、③に分解(識別)するためのツール。



# 合理性(合理的期待)の仮定

(再掲)「現在の変数」

$$= A \times \text{「説明変数」} + B \times \text{「期待変数」} + \text{「ショック」}$$

- 期待の評価(期待形成の仮定)次第で、どんな変数も説明できる。すなわち、期待に関するアド・ホックな仮定は、無数の可能性を提示する。
- 理論では、「スーパー・スマート」な個人が、全ての情報を吟味して、期待を形成し、行動を決定。このケースは、議論のベンチマークになる。





# 理論なき推定

- フィリップス曲線を単純に推定すると、中央銀行の政策スタンス次第で、ラグにかかるパラメーター(C)が変化する可能性。

$$\text{インフレ率} = C \times \text{インフレ率}(-1) + D \times \text{GDP}$$

- インフレ・ファイティングな政策(ルール)を用いた場合には、Cは小さくなるはず。



# ルーカス批判

- 政策分析をしたいのに、政策次第でモデルのパラメーターが変化する。これでは政策分析できない(ルーカス批判)。
- 理論モデル(ニュー・ケインジアン・モデル)では、フィリップス曲線のパラメーターは、家計の割引率といった政策に対して不変と考えられるパラメーター(deep parameter)で表現される。
- 政策分析にはミクロ的基盤のある理論モデルが必要不可欠。



- イン트로ダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

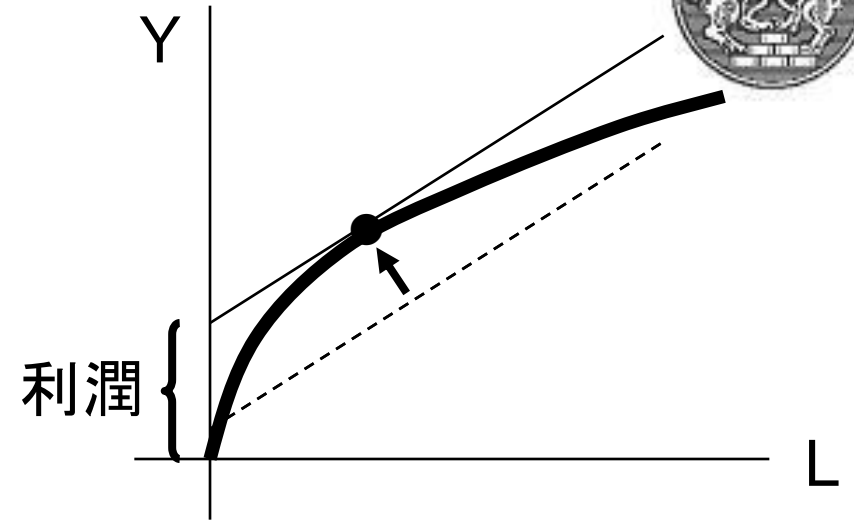


# 一般均衡モデル

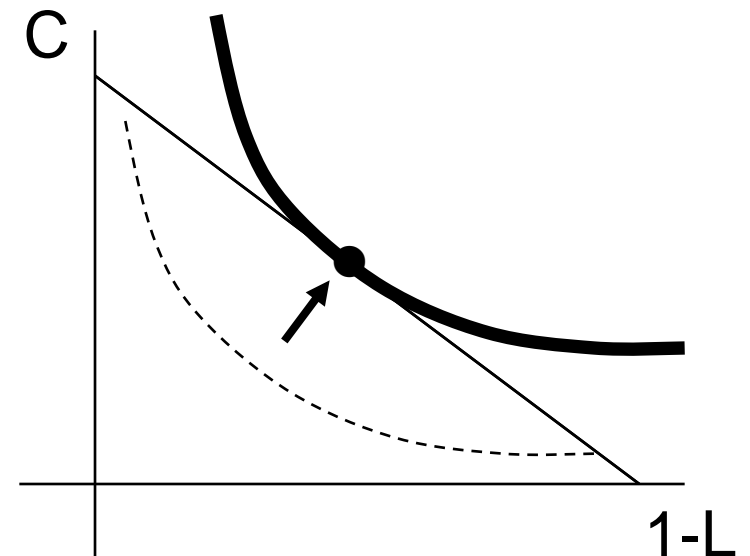
- 方程式が、各経済主体の最適化問題より導出される。
- 各企業は、要素価格を所与として、利潤を最大化するように、生産要素(労働等)を選択。
- 各消費者は、価格を所与として、効用を最大化するように、消費水準と余暇を選択。
- このような問題から求まる均衡(最適選択の結果としての需要と供給をバランスする均衡)を競争均衡と呼ぶ。



- 企業の問題:  
 $\max_L \Pi = PY - WL$   
s.t.  $Y = AL^\alpha$



- 家計の問題:  
 $\max_{C,L} U = u(C) - v(L)$   
s.t.  $PC = WL + \Pi$

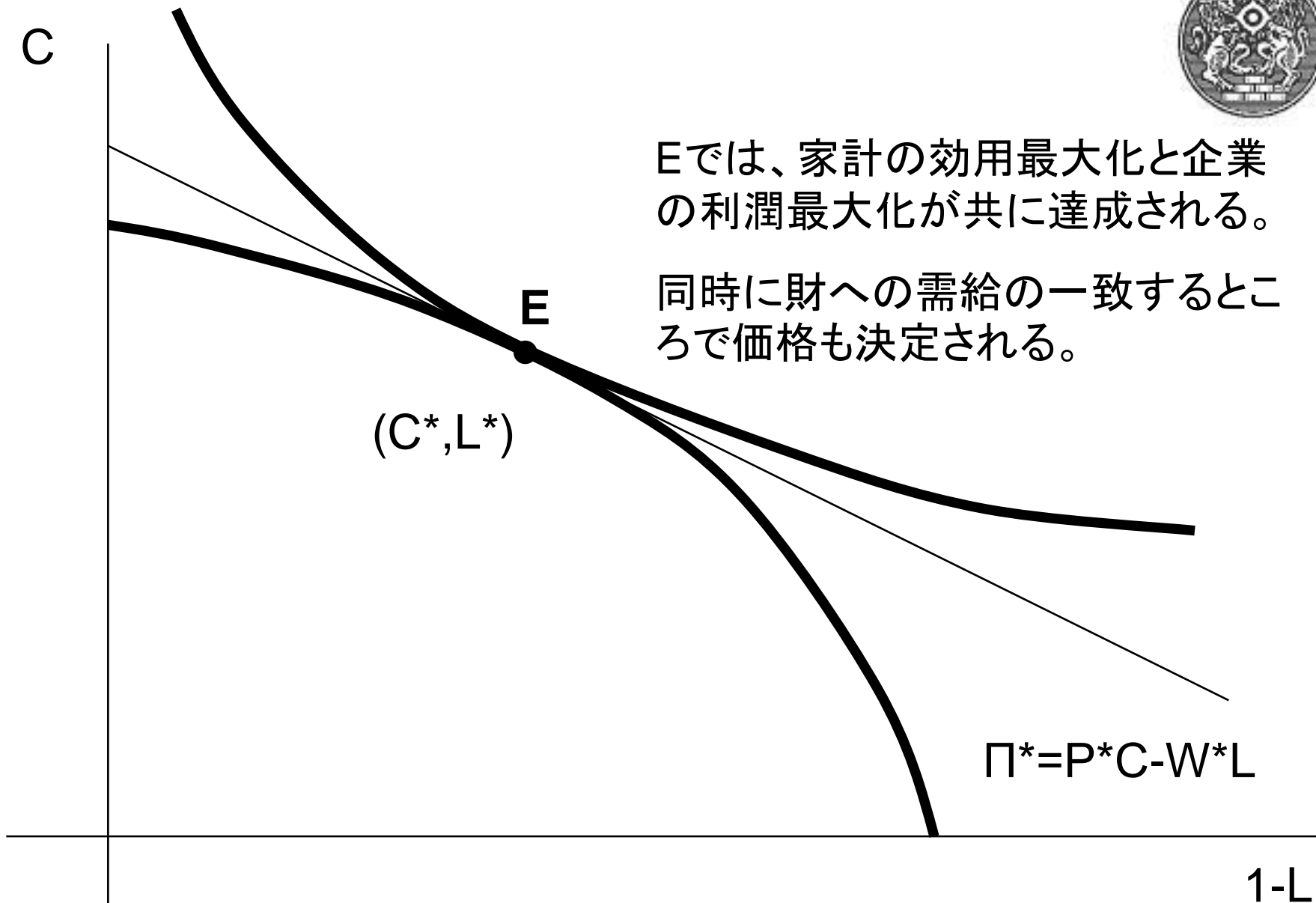


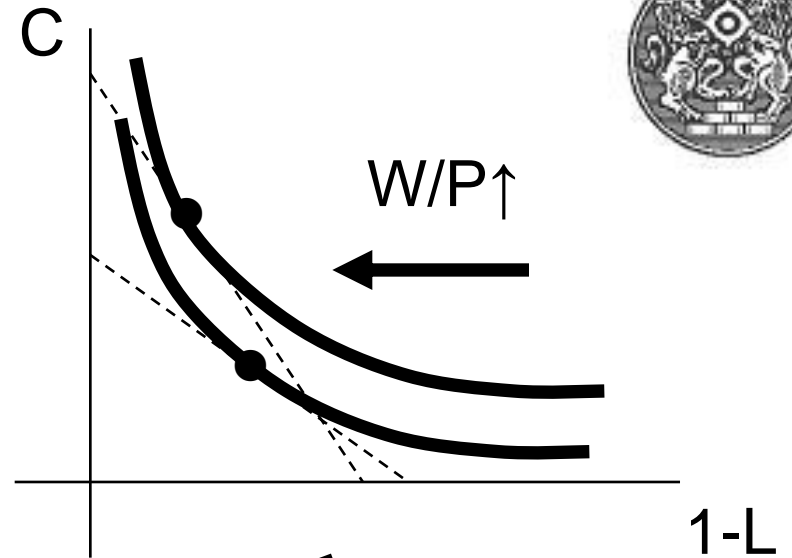
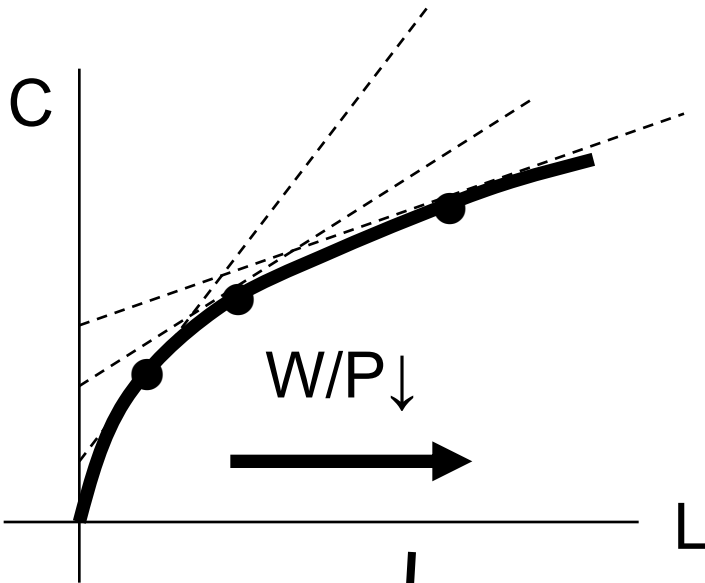
- 財市場均衡:  $Y = C$



Eでは、家計の効用最大化と企業の利潤最大化が共に達成される。

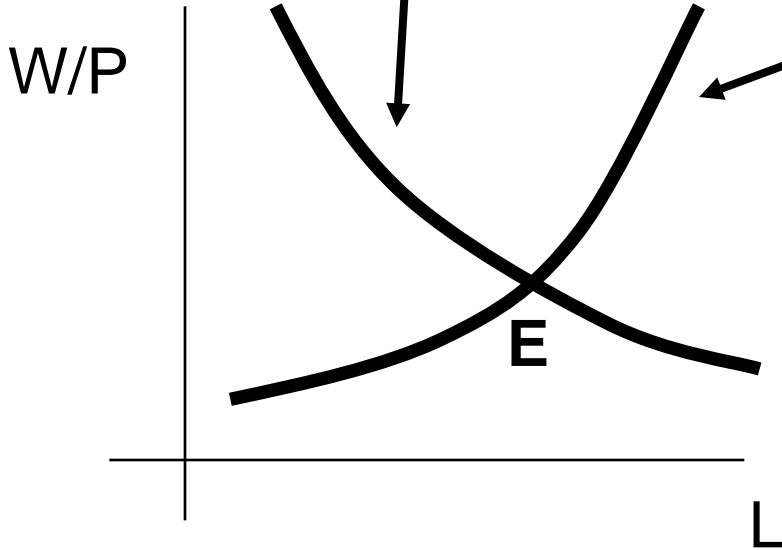
同時に財への需給の一致するところで価格も決定される。





(企業)労働需要

(家計)労働供給



要素需要曲線と要素供給曲線が、単調的で連続であれば、唯一の均衡が定まる。



- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- **DSGEモデル**
  - **新古典派成長モデル**
  - **ニュー・ケインジアン・モデル**
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題および発展





# 新古典派成長モデル

- 社会計画者が、経済主体の効用を最大化するような経済を考える。
- 一見、非現実的にみえるが、経済に歪み (Distortion) や外部性がない場合には、このような社会計画者の配分と、それぞれの主体が自身の効用を最大化するように行動した結果として得られる競争均衡の配分は等しくなる。



# 社会計画者の問題

- 社会計画者は、以下のように定義される社会全体の効用を

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [u(C_t) - v(h_t)]$$

以下の資源制約式と資本遷移式（と初期条件）の下、最大化する。

$$C_t + I_t \leq f(K_t, h_t)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$



# 関数形の設定

- 消費からくる効用と、労働からの限界不効用、および生産関数について、以下のような関数形を想定。

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

$$v(h_t) = \chi \frac{h_t^2}{2}$$

$$f(K_t, h_t) = K_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$$



# モデル

- 1階の必要条件(必要十分条件となるが、これには別途証明が必要)より、以下の3式よりなるモデルが構築される。

$$C_t + K_{t+1} - (1 - \delta)K_t = K_t^\alpha h_t^{1-\alpha}$$

$$\chi h_t = (1 - \alpha)C_t^{-\sigma} K_t^\alpha h_t^{-\alpha}$$

$$C_t^{-\sigma} = \beta E_t \left[ (1 - \delta) + \alpha K_t^{\alpha-1} h_t^{1-\alpha} \right]$$



# 定常状態

- このモデルは安定的であるため（証明については後述）、経済は、以下で定義される定常状態に収斂する。

$$\frac{C}{K} + \delta = \left( \frac{K}{h} \right)^{\alpha-1}$$

$$\frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \alpha \left( \frac{K}{h} \right)^{\alpha-1}$$

$$\chi h = (1 - \alpha) C^{-\sigma} \left( \frac{K}{h} \right)^{\alpha}$$



# モデルの解法

- すべての内生変数を、非線形の状態変数よりなる関数で表現することによって、解を求める方法もある(この場合、価値関数、すなわち解の唯一性を縮小写像で証明)が、推定等を行う場合には、モデルを定常状態周りで線形対数近似し、これを状態空間表現した上で、内生変数を線形の状態変数よりなる関数で表現する場合が多い。

$$\hat{X}_t \equiv \log\left(\frac{X_t}{X}\right) \approx \frac{X_t - X}{X}$$



# 対数線形近似モデル

- 対数線形近似後のモデルは以下の3式で表現される。

$$\frac{C}{Y} \hat{C}_t + \frac{K}{Y} \hat{K}_{t+1} + (1 - \delta) \frac{K}{Y} \hat{K}_t = \alpha \hat{K}_t + (1 - \alpha) \hat{h}_t$$

$$(1 + \alpha) \hat{h}_t = -\sigma \hat{C}_t + (1 - \alpha) \hat{K}_t$$

$$-\sigma \hat{C}_t = -\sigma \beta \left[ (1 - \delta) + \alpha \frac{Y}{K} \right] E_t \hat{C}_{t+1} \\ + \alpha \beta \left[ (\alpha - 1) \hat{K}_{t+1} + (1 - \alpha) E_t \hat{h}_{t+1} \right]$$

# 新古典派成長モデルの解



- 上記モデルは一つの式に集約可能。

$$\Gamma_1 \hat{K}_{t+2} + \Gamma_2 \hat{K}_{t+1} + \Gamma_3 \hat{K}_t = 0$$

- 以下に変形 ( $r_1$ 、 $r_2$ は2次方程式の根)。

$$\Gamma_1 \hat{K}_{t+2} + \Gamma_2 L \hat{K}_{t+2} + \Gamma_3 L^2 \hat{K}_{t+2} = (\Gamma_1 + \Gamma_2 L + \Gamma_3 L^2) \hat{K}_{t+2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{r_1} L\right) \left(1 - \frac{1}{r_2} L\right) \hat{K}_{t+2} = 0$$

- $r_1$ の絶対値のみが1より大きければ、解が求まる。

$$\hat{K}_{t+2} = \frac{1}{r_1} \hat{K}_{t+1}$$





- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- **DSGEモデル**
  - 新古典派成長モデル
  - **ニュー・ケインジアン・モデル**
  - 解の唯一性
  - CEEモデル
- 今後の課題

# ニュー・ケインジアン・モデル



- 価格が緩やかにしか調整されないことを仮定。
- この結果、将来価格を変更できない可能性も考慮しながら、企業は足許の価格を設定。
- 例えば、企業が、来期は価格を変更できないと予測すると、今期の価格を、今期と来期の限界費用を基に設定（フォワード・ルッキングな価格設定）。
- 詳細は、例えば、加藤（2006）を参照。



# モデル

- 金利が上昇すると、需要が低下することを表現した動学IS曲線(オイラー方程式)

$$x_t = x_{t+1} - \sigma^{-1} (i_t - E_t \pi_{t+1} - r_t^n)$$

- 需要が増加すると、物価が上昇することを表現したフィリップス曲線

$$\pi_t = \beta E_t \pi_{t+1} + \kappa x_t$$

- 物価が上昇した場合に、金利を引き上げるような政策ルール(テイラー・ルール)

$$i_t = \theta \pi_t$$



# 状態空間表現

- 上記のモデルは、以下の状態空間表現が可能。

$$\begin{pmatrix} \sigma & \theta \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_t^n$$



$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_t \\ \pi_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sigma & \theta \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma & 1 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma & \theta \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} r_t^n \\ &= \frac{1}{\sigma + \theta} \begin{pmatrix} \sigma & 1 - \theta\beta \\ \kappa\sigma & \kappa + \sigma\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma + \theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix} r_t^n \\ &= \frac{1}{\sigma + \theta} \Omega \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \pi_{t+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma + \theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \kappa \end{pmatrix} r_t^n\end{aligned}$$

- $\Omega$ の固有値が2つとも1より小さければ(左辺と右辺が逆の場合には、1より大きければ)、合理的期待均衡が存在する。



- イン트로ダクション
- 一般均衡モデル
- **DSGEモデル**
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル
  - **解の唯一性**
  - CEEモデル
- 今後の課題



# 解の唯一性

- 線形モデルは、すべて、以下のような状態空間表現が可能。

$$\begin{pmatrix} E_t \Phi_{t+1} \\ \Psi_t \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \Phi_t \\ \Psi_{t-1} \end{pmatrix}$$

- 以下のような固有値分解

$$\Gamma = T \Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \left[ \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{21} \\ t_{22} \end{pmatrix} \right]$$



を用いると、以下のように変形される

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_t \Phi_{t+1} \\ \Psi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_t \\ \Psi_{t-1} \end{pmatrix}$$

- ここで、 $|\lambda_1| > 1$ ,  $|\lambda_2| < 1$ であったとすると、1行目は発散してしまうため、解の存在には、 $t_{22}\Phi_t - t_{21}\Psi_{t-1} = 0$ が満たされなくてはならない。
- 一方、2行目については、上条件を用いると、

$$\begin{pmatrix} t_{11} - t_{21} \frac{t_{21}}{t_{22}} \end{pmatrix} \Psi_t = \lambda_2 \begin{pmatrix} t_{11} - t_{21} \frac{t_{21}}{t_{22}} \end{pmatrix} \Psi_{t-1}$$

が導出される。





- 上記2式:

$$t_{22}\Phi_t - t_{21}\Psi_{t-1} = 0$$

$$\left( t_{11} - t_{21} \frac{t_{21}}{t_{22}} \right) \Psi_t = \lambda_2 \left( t_{11} - t_{21} \frac{t_{21}}{t_{22}} \right) \Psi_{t-1}$$

より、状態変数( $\Psi$ )の初期値を用いれば、定常状態に収斂するような合理的期待均衡、すなわち、解を求めることができる。

- フォワード・ルッキング変数の数と1より大きい固有値の数が一致すると、ユニークな合理的期待均衡が求まる(主観的割引率の存在により、ユニークに解が決まることが多い)。



- イントロダクション
- 一般均衡モデル
- **DSGEモデル**
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル
  - **CEEモデル**
- 今後の課題



# CEEモデル

- データ説明力の高さから、中央銀行をはじめとした政策機関では、CEEモデルをベースにしたコア・モデルがとして用いられている。
- 消費、および、投資のショックに対する緩やかな反応を表現するために、消費の習慣形成（過去の消費に今期の消費は影響を受ける）、投資成長率の調整コスト（前期に比べ投資を増減させるとコストがかかる）等が組み込まれている。



# 家計の問題

- 各家計*i*は、以下のように定義される効用を

$$U_{i,t} = \log(C_{i,t} - bC_{i,t-1}) - \psi_L \frac{h_{i,t}^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L},$$

予算制約式、資本の遷移式、労働需要曲線を制約に最大化する。

$$\frac{B_{i,t+1}}{P_t} = R_{t+1}^n \frac{B_{i,t}}{P_t} + (1 + \tau_W) \frac{W_{i,t}}{P_t} h_{i,t} \left\{ 1 - \frac{\zeta_w}{2} \left[ \frac{W_{i,t}}{\mu \exp(u_t) W_{i,t-1}} - 1 \right]^2 \right\} + r_t^K K_{i,t} + D_{i,t} - C_{i,t} - I_{i,t} - T_{i,t},$$

$$K_{i,t+1} = (1 - \delta) K_{i,t} + \left[ 1 - S \left( \frac{I_{i,t}}{I_{i,t-1}} \right) \right] I_{i,t};$$

$$h_{j,t} = \left( \frac{W_{j,t}}{W_t} \right)^{-\theta_h} h_t$$



# 企業の問題

- 各企業jは、以下のように定義される利潤を

$$D_{j,t} = (1 + \tau) \frac{P_{j,t}}{P_t} Y_{j,t} - \phi_t Y_{j,t} - \frac{\zeta_p}{2} \left( \frac{P_{j,t}}{P_{j,t-1}} - 1 \right)^2 Y_t$$

以下の財需要曲線の下で最大化するように、個別価格を設定する。

$$Y_{j,t} = \left( \frac{P_{j,t}}{P_t} \right)^{-\theta_p} Y_t$$



# 中央銀行

- 中央銀行は、以下のような政策ルールに基づき、金利を設定する。

$$R_{t+1}^n = \rho R_{t-1}^n + (1 - \rho) \left[ R + \eta \left( \frac{E_t P_{t+1}}{P_t} - 1 \right) + \eta_y \left( \frac{Y_t}{Y_t^+} - 1 \right) \right]$$



# 対数線形近似モデル

$$\begin{aligned}
& h^{1-\alpha} \left(\frac{k}{\mu}\right)^\alpha \left[ (1-\alpha) z_t + (1-\alpha) \widehat{h}_t + \alpha \widehat{k}_t - \alpha u_t \right] - c \widehat{c}_t - \widehat{i} i_t = 0, \\
& -\widehat{k}_{t+1} + \frac{(1-\delta)}{\mu} (\widehat{k}_t - u_t) + \frac{i}{k} \widehat{i} i_t = 0, \\
& \left(c - \frac{bc}{\mu}\right)^{-2} \left[ -c \widehat{c}_t + \frac{bc}{\mu} \widehat{c}_{t-1} - \frac{bc}{\mu} u_t \right] - \widetilde{\lambda} \widetilde{\lambda}_t \\
& + b\beta (\mu - b)^{-2} c^{-1} (\mu E_t \widehat{c}_{t+1} - b \widehat{c}_t + \mu E_t u_{t+1}) = 0, \\
& -\widehat{w}_t + \widehat{\phi}_t + (1-\alpha) z_t - \alpha \widehat{h}_t + \alpha \widehat{k}_t - \alpha u_t = 0, \\
& -\widehat{\pi}_t - \widehat{\pi}_t^W + \beta E_t \widehat{\pi}_{t+1} + \beta E_t \widehat{\pi}_{t+1}^W + \frac{\theta_h - 1}{\zeta_w} \widehat{\varphi}_t = 0, \\
& -\widehat{\varphi}_t + \sigma_L \widehat{h}_t - \widetilde{\lambda}_t - \widehat{w}_t = 0, \\
& -\widehat{r}_t^K + \widehat{\phi}_t + (1-\alpha) \widehat{z}_t + (1-\alpha) \widehat{h}_t + (\alpha - 1) \widehat{k}_t + (1-\alpha) u_t = 0, \\
& -\widehat{P}_{K',t} + E_t \widetilde{\lambda}_{t+1} - E_t u_{t+1} - \widetilde{\lambda}_t + \frac{\beta r^K}{\mu} E_t \widehat{r}_{t+1}^K + \frac{\beta(1-\delta)}{\mu} E_t \widehat{P}_{K',t+1} = 0, \\
& \widehat{P}_{K',t} - (1+\beta) S'' \mu^2 \widehat{i} i_t + \mu^2 S'' \widehat{i} i_{t-1} + \beta S'' \mu^2 E_t \widehat{i} i_{t+1} = 0, \\
& -\widehat{\pi}_t + \beta E_t \widehat{\pi}_{t+1} + \frac{\theta_p}{\zeta_p} \widehat{\phi}_t = 0, \\
& -R^n \widehat{R}_t^n + \rho R^n \widehat{R}_{t-1}^n + (1-\rho) \eta E_t \widehat{\pi}_{t+1} + (1-\rho)(1-\alpha) \eta_y z_t \\
& + (1-\rho)(1-\alpha) \eta_y \widehat{h}_t + (1-\rho) \alpha \eta_y \widehat{k}_t = 0, \\
& E_t \widehat{\pi}_{t+1} - \widehat{R}_t^n - E_t \widetilde{\lambda}_{t+1} + \widetilde{\lambda}_t + E_t \widehat{u}_{t+1} = 0, \\
& -\widehat{\pi}_t^W + \widehat{w}_t - \widehat{w}_{t-1} = 0.
\end{aligned}$$

- 状態空間表現が可能。



- イン트로ダクション
- 一般均衡モデル
- DSGEモデル
  - 新古典派成長モデル
  - ニュー・ケインジアン・モデル
  - CEEモデル
- 今後の課題





# 今後の課題

- 金融市場の不完全性の取り組み: Bernanke et al(1999)、Kiyotaki and Moore(1997)
- 失業の組み込み: Gertler and Trigari (2009)、Blanchard and Gali (2007)
- ニュース・ショックの組み込み: Schmitt-Grohe and Uribe (2008)、Fujiwara et al (2008)
- 多国間モデルの推定: Lubik and Schorfheide (2005)
- 非線形推定: Rubio-Ramirez and Fernandez-Villarverde (2005)



# 参考文献

- 加藤、2006、*現代マクロ経済学講義-動学的一般均衡モデル*、東洋経済新報社
- Bernanke, Gertler and Gilchrist, 1999, “The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework,” *Handbook of Macroeconomics*
- Blanchard and Gali, 2007, “Real Wage Rigidities and the New Keynesian Model,” *Journal of Money, Credit and Banking*
- Christiano, Eichenbaum and Evans, 2005, “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy,” *Journal of Political Economy*
- Fujiwara, Hirose and Shintani, 2008, “Can News Be a Major Source of Aggregate Fluctuations?” BOJ-IMES Discussion Paper
- Gertler and Trigari, 2009, “Unemployment Dynamics with Staggered Nash Wage Bargaining” *Journal of Political Economy* (forthcoming)
- Kiyotaki and Moore, 1997, “Credit Cycles,” *Journal of Political Economy*
- Lubik and Schorfheide, 2005, “A Bayesian Look at New Open Economy Macroeconomics,” *NBER Macroeconomics Annual*
- Rubio-Ramirez and Fernandez-Villarverde, 2005, “Estimating Dynamic Equilibrium Economies: Linear versus Nonlinear Likelihood,” *Journal of Applied Econometrics*
- Schmitt-Grohe and Uribe, 2008, “What’s News in Business Cycles,” *NBER Working Paper*

# 動学的マクロモデルの計量分析

## (2) DSGE および DSGE-VAR モデルの MCMC ベイズ分析

渡部敏明

一橋大学経済研究所

## DSGE モデル

- ▶ 家計や企業はさまざまなショックの下で動学的な期待効用や期待利潤の最大化を行う.
- ▶ その結果得られる一般均衡を分析する.
- ▶ Kydland and Prescott (1982) の RBC からスタート.
- ▶ その後, さまざまな市場の摩擦を加えたニュー・ケインジアン・モデルに発展.
- ▶ ショックの識別が容易にできる.  $\leftrightarrow$  VAR
- ▶ そこで, マクロ経済学者だけでなく, 中央銀行などの政策当局の関心も集めている.

## DSGE モデルの推定法

- ▶ DSGE モデルの分析手法として、MCMC を用いたベイズ推定法が用いられるようになってきている.
- ▶ この手法について解説した文献
  - ▶ liboshi, Nishiyama and Watanabe (2006)
  - ▶ An and Schorfheide (2007)
  - ▶ Fernández-Villaverde (2009)
  - ▶ Canova (2007)
  - ▶ Dejong and Dave (2007)
  - ▶ Pytlarczyk (2007)
  - ▶ Geweke (2010)
- ▶ この手法を有名にしたもの
  - ▶ Smets and Wouters (2003)
  - ▶ Dynare (矢野 (2008))

## DSGE モデルの推定法

- ▶ 日本のマクロデータへの応用
  - ▶ liboshi, Nishiyama and Watanabe (2006)
  - ▶ Sugo and Ueda (2008)
  - ▶ Ichiue, Kurozumi and Sunakawa (2008)
  - ▶ 岩田 (2009)

## 従来のベイズ推定

1. 事前分布  $f(\theta)$  を設定する.
2. ベイズの定理

$$f(\theta|\text{data}) = \frac{f(\text{data}|\theta)f(\theta)}{\int f(\text{data}|\theta)f(\theta)d\theta}$$

を用いて事後分布を求める.

3. 事後分布を用いて  $\theta$  を推定する.

## MCMC を用いたベイズ推定

1. 事前分布  $f(\theta)$  を設定する.
2. MCMC を用いて, 事後分布  $f(\theta|\text{data})$  から  $\theta$  をサンプリングする.
3. サンプリングされた値を用いて,  $\theta$  を推定する.



## MCMC ベイズ推定の利点

- ▶ 事前分布に事前情報を反映できる.
- ▶ パラメータの関数も事後分布からサンプリングできるので, 例えばインパルス応答関数をパラメータの不確実性を考慮して導出できる.
- ▶ 事後オッズ比を用いたベイズのモデル比較では, 互いに入れ子になっていないモデル同士 (DSGE と VAR) でも比較できる.

## MCMC

- ▶ 1 回前にサンプリングされた値を使って次の値をサンプリングする方法の総称.
  - (1) ギブス・サンプラー
  - (2) メトロポリス・ヘイスティングス (MH) アルゴリズム
- ▶ 和合 (2005), 中妻 (2007), 小西・越智・大森 (2008)
- ▶ DSGE モデルの先行研究では, MH アルゴリズムが用いられている.

## 事後分布

$$f(\theta|\text{data}) = \frac{f(\text{data}|\theta)f(\theta)}{\int f(\text{data}|\theta)f(\theta)d\theta} \propto \underbrace{f(\text{data}|\theta)}_{\text{尤度}} \times \underbrace{f(\theta)}_{\text{事前分布}}$$

## DSGE モデルの尤度

- ▶ DSGE モデルは以下の線形ガウシアン状態空間モデルで表せる.

- ▶ 観測方程式:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A} \mathbf{s}_t$$

- ▶ 推移方程式:

$$\mathbf{s}_t = \Theta_1 \mathbf{s}_{t-1} + \Theta_0 \epsilon_t, \epsilon_t \sim \text{NID}(0, I)$$

- ▶ 線形ガウシアン状態空間モデルの尤度は、カルマン・フィルタを用いることにより計算できる (Durbin and Koopman (2001), Harvey (1989), Kim and Nelson (1999)).

## MH アルゴリズム

- ▶ Chib and Greenberg (1995)
- ▶  $f(\theta)$  からサンプリングしたいとする.
- ▶ まず, 提案密度関数  $g(\theta|\theta_{n-1})$  と初期値  $\theta_0$  を選択する.
- ▶ 次に, 以下のアルゴリズムを用いて  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  をサンプリングする.

## MH アルゴリズム

- (1)  $n = 1$  とする.
- (2) 提案密度関数  $g(\theta|\theta_{n-1})$  からサンプリングし, サンプリングされた値  $\theta_n^{(\text{proposal})}$  と 1 回前にサンプリングされた値  $\theta_{n-1}$  を用いて, 次の確率を計算する.

$$q = \min \left[ \frac{f(\theta_n^{(\text{proposal})})g(\theta_{n-1}|\theta_n^{(\text{proposal})})}{f(\theta_{n-1})g(\theta_n^{(\text{proposal})}|\theta_{n-1})}, 1 \right]$$

- (3)  $\theta_n^{(\text{proposal})}$  を確率  $q$  で受容し, 残りの確率  $1 - q$  で棄却する. 受容されたら,  $\theta_n = \theta_n^{(\text{proposal})}$ , 棄却されたら,  $\theta_n = \theta_{n-1}$  とする.
- (4)  $n < N$  であれば,  $n = n + 1$  として (2) に戻る.  $n = N$  であれば, 終了.

## MH アルゴリズム

- ▶  $N \rightarrow \infty$  とすると,  $\theta_N$  は  $f(\theta)$  からサンプリングされた変数に確率収束する.
- ▶ そこで,  $N$  を十分大きな数とすると,  $(\theta_{N+1}, \dots, \theta_{N+M})$  は  $f(\theta)$  からサンプリングされた値と見なせる.
- ▶ 最初の  $(\theta_1, \dots, \theta_N)$  を捨て (捨てる最初の  $N$  回を “burn-in” と呼ぶ), 残りの  $(\theta_{N+1}, \dots, \theta_{N+M})$  を用いて推定を行えばよい.

## ランダム・ウォーク MH

- ▶ 先行研究ではこの方法が用いられている.
- ▶  $\theta_n^{(\text{proposal})}$  を下記のランダム・ウォーク・モデルからサンプリングする.

$$\theta_n^{(\text{proposal})} = \theta_{n-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim \text{NID}(0, c\mathbf{H})$$

ここで,  $\hat{\theta}$  を  $f(\theta)$  のモードとすると,  $\mathbf{H}$  は  $-\ln f(\hat{\theta})$  のヘッシアンの逆行列,  $c$  は調整係数である.

## ランダム・ウォーク MH

- ▶ そうすると,

$$g(\theta_{n-1} | \theta_n^{(\text{proposal})}) = g(\theta_n^{(\text{proposal})} | \theta_{n-1})$$

となるので,

$$q = \min \left[ \frac{f(\theta_n^{(\text{proposal})})}{f(\theta_{n-1})}, 1 \right]$$

となり,  $q$  は提案密度関数  $g(\theta | \theta_{n-1})$  に依存しなくなる.



## ランダム・ウォーク MH

- ▶  $\theta_n^{(\text{proposal})}$  が  $\theta_{n-1}$  とあまり離れないようにする必要がある。 そうしないと、 $q$  が低くなる可能性あり。
- ▶ そのためには、調整係数  $c$  を小さくする必要があるが、 $c$  をあまり小さくすると、狭い範囲からしかサンプリングされなくなる。
- ▶ そこで、 $c$  は受容確率が 25% 程度になるように調整するのが望ましいとされている。
- ▶ Adaptive Random Walk MH: Roberts and Rosenthal (2007), Roberts and Rosenthal (2009), Rosenthal (2010).
- ▶ 他の方法: Chib and Ramamurthy (2010).

## 事後分析

- ▶ 各パラメータの平均や分散は burn-in 以降にサンプリングされた値の標本平均や標本分散として推定できる.
- ▶ 各パラメータの 90%信用区間 (credible interval) を求めるには, burn-in 以降にサンプリングされた値を大きさの順に並べ替え, 上 5%と下 5%の値をとればよい.
- ▶ 関数  $h(\theta)$  の平均を推定するには, burn-in 以降にサンプリングされた  $\theta$  の値を  $h(\theta)$  に代入し, その標本平均を計算すればよい.
- ▶ 関数  $h(\theta)$  の 90%信用区間も同様に求められる.

## 標準誤差の計算

- ▶ ただし、サンプリングされた値には自己相関があるので、平均の標準誤差を計算する際には注意が必要. 例えば、以下の Parzen window を使うと計算できる.

$$\widehat{\text{Var}}(\bar{\theta}) = \frac{1}{M} \left[ \hat{\gamma}(0) + \frac{2M}{M-1} \sum_{i=1}^{B_M} K\left(\frac{i}{B_M}\right) \hat{\gamma}(i) \right]$$

$$\hat{\gamma}(i) = \frac{1}{M} \sum_{k=i+1}^M (\theta^{(k)} - \bar{\theta})(\theta^{(k-i)} - \bar{\theta})$$

$B_M$ =band width

$$K(z) = \begin{cases} 1 - 6z^2 + 6z^3, & z \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2(1-z)^3, & z \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

## CD 統計量

- ▶ MCMC 法が収束したかどうかを判定する統計量には、例えば、Geweke (1992) の CD (Convergence Diagnostic) 統計量がある。これは、burn-in 以降の  $M$  個のサンプルの中の最初から  $M_A$  個のサンプルの平均  $\bar{\theta}_A$  と最後から  $M_B$  個のサンプルの平均  $\bar{\theta}_B$  を使って以下のように計算される。

$$CD = \frac{\bar{\theta}_A - \bar{\theta}_B}{\sqrt{\widehat{\text{Var}}(\bar{\theta}_A) + \widehat{\text{Var}}(\bar{\theta}_B)}}$$

- ▶ MCMC 法が収束していれば、これは漸近的に標準正規分布に従う。
- ▶ Geweke (1992) は  $M_A = 0.1M$ ,  $M_B = 0.5M$  とすることを推奨している。

## ニュー・ケインジアン DSGE モデル

- ▶ DSGE モデルは, 市場の摩擦を加えたニュー・ケインジアン DSGE モデルとして発展.
- ▶ ニュー・ケインジアン DSGE モデルの中で, 米欧のマクロデータにフィットが良いのが Christiano, Eichenbaum and Evans (2005) によって提案された CEE モデル.
- ▶ このモデルは以下のような市場の摩擦を導入.
  - (1) Calvo (1983) 型の価格・賃金の硬直性
  - (2) 消費の習慣形成
  - (3) 投資の調整コスト
  - (4) 可変資本稼働率
- ▶ インフレや生産のショックの持続性をうまく説明できる.

## 家計

## ▶ 効用関数

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{(C_t - H_t)^{1-\sigma_c}}{1-\sigma_c} - \frac{u_t^L l_t^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L} \right] u_t^c$$

$C_t$ : 実質消費

$H_t$ : 習慣形成  $\rightarrow H_t = \theta C_{t-1}$

$l_t$ : 労働供給

$\sigma_c$ : 長期 IES の逆数

$\sigma_L$ : 労働供給弾力性の逆数

$u_t^c$ : 選好ショック

$u_t^L$ : 労働供給ショック

## 家計

### ▶ 予算制約

$$\underbrace{B_t + P_t [c_t + inv_t + a(u_t)K_t]}_{\text{名目総支出}} = \underbrace{R_{t-1}B_{t-1} + W_t l_t + R_t^k u_t K_t + Div_t}_{\text{名目総収入}}$$

$B_t$ : 債券保有,  $P_t$ : 価格指数,

$inv_t$ : 投資,  $K_t$ : 資本保有,

$u_t$ : 資本稼働率,

$a(u_t)$ : 資本利用コスト,  $a'(u) > 0$ ,  $a''(u) < 0$ ,

$R_{t-1}$ : 1+名目利子率,

$W_t$ : 名目賃金,  $l_t$ : 労働供給,

$R_t^k$ : 資本のレンタル率,  $Div_t$ : 名目配当

## 家計

- ▶ 資本蓄積

$$K_{t+1} = (1 - \tau)K_t + \left[1 - S\left(u_t^{inv} inv_t / inv_{t-1}\right)\right] inv_t$$

$\tau$ : 資本減耗率,  $u_t^{inv}$ : 投資ショック

- ▶ 資本の調整コスト

$$S\left(\frac{inv_t}{inv_{t-1}}\right) = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{2} \left(\frac{inv_t}{inv_{t-1}} - 1\right)^2$$

$\varphi$ : 調整コストの逆数



## 家計

$$\begin{aligned}
 L = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t & \left\{ \left[ \frac{(C_t - H_t)^{1-\sigma_c}}{1-\sigma_c} - \frac{l_t^{1+\sigma_L}}{1+\sigma_L} \right] \right. \\
 & + \lambda_t \left[ \frac{R_{t-1}}{\Pi_t} b_{t-1} + w_t l_t + r_t^k u_t K_t + div_t \right. \\
 & \left. \left. - b_t - c_t - inv_t - a(u_t) K_t \right] \right. \\
 & \left. + q_t \left[ (1-\tau) K_t + \left[ 1 - S \left( \frac{inv_t}{inv_{t-1}} \right) \right] inv_t - K_{t+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

## 家計

- ▶ FOC's

$$c : \lambda_t = (c_t - \theta c_{t-1})^{-\sigma_c} u_t^c$$

$$b : \lambda_t = \beta E_t \left[ \frac{R_t}{\Pi_{t+1}} \lambda_{t+1} \right]$$

## 対数線形モデル

$$\hat{x} = \ln(x) - \ln(x^{SS})$$

(1) Consumption Euler equation:

$$\begin{aligned}\hat{c}_t &= \frac{\theta}{1+\theta} \hat{c}_{t-1} + \frac{1}{1+\theta} E_t \hat{c}_{t+1} - \frac{1-\theta}{(1+\theta)\sigma_c} (\hat{R}_t - E_t \hat{\pi}_{t+1}) \\ &\quad + \frac{1-\theta}{(1+\theta)\sigma_c} (1-\rho^c) u_t^c\end{aligned}$$

(2) Investment Euler equation:

$$\begin{aligned}\widehat{inv}_t &= \frac{1}{1+\beta} \widehat{inv}_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta} E_t \widehat{inv}_{t+1} + \frac{\varphi}{1+\beta} \hat{q}_t \\ &\quad + \frac{\beta}{1+\beta} (1-\rho^{inv}) u_t^{inv}\end{aligned}$$

## 対数線形モデル

(3) Asset Pricing Euler equation:

$$\hat{q}_t = -(\hat{R}_t - E_t \hat{\Pi}_{t+1}) + \frac{1 - \tau}{1 - \tau + \bar{r}^k} E_t \hat{q}_{t+1} + \frac{\bar{r}^k}{1 - \tau + \bar{r}^k} E_t \hat{r}_{t+1}^k + \varepsilon_t^q$$

(4) Real wage law of motion:

$$\begin{aligned} \hat{w}_t = & \frac{\beta}{1 + \beta} E_t \hat{w}_{t+1} + \frac{1}{1 + \beta} \hat{w}_{t-1} + \frac{\beta}{1 + \beta} E_t \hat{\pi}_{t+1} - \frac{1 + \beta \gamma_w}{1 + \beta} \hat{\pi}_t \\ & + \frac{\gamma_w}{1 + \beta} \hat{\pi}_{t-1} - \frac{\lambda_w (1 - \beta \xi_w) (1 - \xi_w)}{(1 + \beta) (\lambda_w + (1 + \lambda_w) \sigma_L) \xi_w} \\ & \times \left[ \hat{w}_t - \sigma_L \hat{L}_t - \frac{\sigma_c}{1 - \theta} (\hat{c}_t - \theta \hat{c}_{t-1}) - u_t^L - \varepsilon_t^w \right] \end{aligned}$$

## 対数線形モデル

(5) Capital accumulation equation:

$$\hat{k}_t = (1 - \tau)\hat{k}_{t-1} + \tau\widehat{inv}_{t-1}$$

(6) Cost minimization condition:

$$\hat{l}_t = -\hat{w}_t + (1 + \psi)\hat{r}_t^k + \hat{K}_{t-1}$$

(7) Production function:

$$\hat{y}_t = \phi\hat{u}_t^a + \phi\alpha\hat{K}_{t-1} + \phi\alpha\psi\hat{r}_t^k + \phi(1 - \alpha)\hat{l}_t$$

## 対数線形モデル

(8) Inflation law of motion:

$$\hat{\pi}_t = \frac{\beta}{1 + \beta\gamma_p} E_t \hat{\pi}_{t+1} + \frac{\gamma_p}{1 + \beta\gamma_p} \hat{\pi}_{t-1} + \frac{(1 - \beta\xi_p)(1 - \xi_p)}{(1 + \beta\gamma_p)\xi_p} \\ \times \left[ \alpha \hat{r}_t^k + (1 - \alpha) \hat{w}_t - u_t^a + \varepsilon_t^p \right]$$

(9) Employment equation:

$$\hat{e}_t = \beta \hat{e}_{t+1} + \frac{(1 - \beta\xi_e)(1 - \xi_e)}{\xi_e} (\hat{l}_t - \hat{e}_t)$$

## 対数線形モデル

(10) Market clearing condition:

$$\hat{y}_t = (1 - \tau k_y - g_y) \hat{c}_t + \tau k_y \widehat{inv}_t + \bar{r}^k \psi k_y r_t^k + g_y u_t^g$$

(11) Monetary policy rule:

$$\hat{R}_t = \rho_m \hat{R}_{t-1} + (1 - \rho_m) [\mu_\pi \hat{\pi}_{t-1} + \mu_y \hat{y}_t] + \varepsilon_t^m$$

## 対数線形モデル

(12) Preference shock:  $u_t^c = \rho^c u_{t-1}^c + \varepsilon_t^c$

(13) Investment shock:  $u_t^{inv} = \rho^{inv} u_{t-1}^{inv} + \varepsilon_t^{inv}$

(14) Labor supply shock:  $u_t^L = \rho^L u_{t-1}^L + \varepsilon_t^L$

(15) Productivity shock:  $u_t^a = \rho^z u_{t-1}^a + \varepsilon_t^a$

(16) Government expenditure shock:  $u_t^g = \rho^g u_{t-1}^g + \varepsilon_t^g$

(17) Inflation forecast error:  $\eta_t^\pi = \hat{\pi}_t - E_{t-1} \hat{\pi}_t$

(18) Real wage forecast error:  $\eta_t^w = \hat{w}_t - E_{t-1} \hat{w}_t$

(19) Equity premium forecast error:  $\eta_t^q = \hat{q}_t - E_{t-1} \hat{q}_t$

(20) Investment forecast error:  $\eta_t^{inv} = \widehat{inv}_t - E_{t-1} \widehat{inv}_t$

(21) Consumption forecast error:  $\eta_t^c = \hat{c}_t - E_{t-1} \hat{c}_t$

(22) Rental rate forecast error:  $\eta_t^{rk} = \hat{r}_t^k - E_{t-1} \hat{r}_t^k$



## 対数線形モデル体系

$$\Gamma_0 \mathbf{s}_t = \Gamma_1 \mathbf{s}_{t-1} + \Psi \boldsymbol{\varepsilon}_t + \Pi \boldsymbol{\eta}_t$$

- ▶ 内生変数ベクトル:

$$\mathbf{s}_t = [y_t, \pi_t, w_t, k_t, inv_t, c_t, R_t, r_t^k, L_t, E_t \pi_{t+1}, E_t w_{t+1}, E_t w_{t+1}, E_t q_{t+1}, E_t inv_{t+1}, E_t c_{t+1}, E_t r_{t+1}^k, u_t^c, u_t^{inv}, u_t^L, u_t^a, u_t^g]'$$

- ▶ 外生ショックベクトル:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = [\varepsilon_t^c, \varepsilon_t^{inv}, \varepsilon_t^q, \varepsilon_t^L, \varepsilon_t^w, \varepsilon_t^a, \varepsilon_t^p, \varepsilon_t^g, \varepsilon_t^m]'$$

- ▶ 予測誤差ベクトル:

$$\boldsymbol{\eta}_t = [\eta_t^\pi, \eta_t^w, \eta_t^q, \eta_t^{inv}, \eta_t^c, \eta_t^{rk}]'$$

## 合理的期待均衡

- ▶ 合理的期待を仮定し, Sims (2002) の方法によって対数線形モデル体系を解くと, 以下の線形状態空間モデルが得られる.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A} \mathbf{s}_t$$

$$\mathbf{s}_t = \Theta_1 \mathbf{s}_{t-1} + \Theta_0 \varepsilon_t$$

- ▶ ただし, DSGE モデルのパラメータの値によっては, 解が無かったり, 複数の可能性もある (Lubik and Schorfheide (2004)).
- ▶ ベイズ推定では, そうしたケースを事前分布で排除できる.

liboshi, Nishiyama and Watanabe (2006) より  
データ

標本期間: 1970Q1 to 1998Q4 (116 observations)

- ▶ 一人当たり実質 GDP = 名目 GDP / 労働人口
- ▶ 一人当たり実質消費 = 名目消費 / 労働人口
- ▶ 一人当たり実質投資 = 名目投資 / 労働人口
- ▶ 労働投入 = 労働時間指数 × 総雇用 / 労働人口
- ▶ 実質賃金指数 = 名目賃金指数 / GDP デフレーター
- ▶ GDP デフレーターの変化率
- ▶ 無担保コールレート
- ▶ すべて HP フィルターによりトレンドを除去した。

Table 1. Prior Distributions of the Parameters

parameters	meanings	type	mean	S. D.
Structural Parameters				
$\theta$	habit formation	beta	0.7	0.1
$\sigma_c$	inverse long-run IES	normal	1	0.375
$\sigma_L$	inverse labor supply elasticity	normal	2	0.75
$1/\varphi$	inverse adj. cost	normal	4	1.5
$\phi$	fixed cost share	normal	1.45	0.25
$\psi$	capital utilization cost	normal	0.2	0.075
$\gamma_p$	price indexation	beta	0.75	0.15
$\gamma_w$	wage indexation	beta	0.75	0.15
$\xi_p$	Calvo price no-revise prob.	beta	0.75	0.15
$\xi_w$	Calvo wage no-revise prob.	beta	0.75	0.15
Policy Parameters				
$\rho_m$	policy, lag interest	beta	0.8	0.1
$\mu_\pi$	policy, inflation	normal	1.7	0.1
$\mu_y$	policy, output	normal	0.125	0.05
Shock Persistence				
$\rho_a$	persist, productivity	beta	0.85	0.1
$\rho_c$	persist, preference	beta	0.85	0.1
$\rho_g$	persist, gov. expenditure	beta	0.85	0.1
$\rho_L$	persist, labor supply	beta	0.85	0.1
$\rho_{inv}$	persist, investment	beta	0.85	0.1

Table 1. Prior Distributions of the Parameters (ct'd)

parameters	meanings	type	mean	S. D.
S. D. of Shocks				
$\varepsilon_c$	preference shock	inv. gamma	0.2	2
$\varepsilon_{inv}$	investment shock	inv. gamma	0.1	2
$\varepsilon_q$	equity premium shock	inv. gamma	0.4	2
$\varepsilon_a$	productivity shock	inv. gamma	0.4	2
$\varepsilon_p$	price markup shock	inv. gamma	0.15	2
$\varepsilon_L$	labor supply shock	inv. gamma	1.0	2
$\varepsilon_w$	wage markup shock	inv. gamma	0.25	2
$\varepsilon_g$	gov. expenditure shock	inv. gamma	0.3	2
$\varepsilon_m$	monetary policy shock	inv. gamma	0.1	2

## Table 2. Posterior Distributions of the Parameters

Parameters	SW	OW	LOWW	INW					
	(2003)	(2010)	(2006)	(2006)					
	mean	median	median	mean	S. E.	S. D.	90-percent interval		CD
Structural Parameters									
$\theta$	0.592	0.400	0.293	0.641	0.016	0.102	[ 0.451	0.780 ]	0.345
$\sigma_c$	1.391	2.178	2.167	2.041	0.028	0.296	[ 1.565	2.530 ]	-0.202
$\sigma_L$	2.503	3.000	1.359	2.427	0.081	0.718	[ 1.241	3.589 ]	-0.032
$1/\varphi$	6.962	0.152*	0.541*	8.338	0.036	0.914	[ 6.870	9.890 ]	0.185
$\phi$	1.417	1.800	1.084	1.581	0.019	0.239	[ 1.186	1.969 ]	0.417
$\psi$	0.201	2.800	0.212	0.182	0.005	0.076	[ 0.056	0.308 ]	-0.490
$\gamma_\rho$	0.477	0.323	0.078	0.613	0.006	0.109	[ 0.439	0.804 ]	1.412
$\gamma_w$	0.728	0.000	0.820	0.578	0.005	0.135	[ 0.353	0.803 ]	-2.566
$\xi_\rho$	0.905	0.930	0.834	0.650	0.005	0.042	[ 0.579	0.726 ]	-0.985
$\xi_w$	0.742	0.704	0.764	0.367	0.012	0.077	[ 0.236	0.500 ]	0.023
Policy Parameters									
$\rho_m$	0.956	0.962	0.830	0.682	0.003	0.034	[ 0.625	0.736 ]	0.145
$\mu_\pi$	1.688	4.000	2.749	1.589	0.005	0.095	[ 1.436	1.747 ]	0.262
$\mu_y$	0.098	0.099	0.055	0.053	0.003	0.042	[ -0.013	0.126 ]	1.208

Table 2. Posterior Distributions of the Parameters (ct'd)

Parameters	SW	OW	LOWW	INW					
	(2003) mean	(2010) median	(2006) median	mean	S. E.	S. D.	(2006) 90-percent interval	CD	
Shock Persistence									
$\rho_a$	0.811	0.957	0.962	0.851	0.006	0.077	[ 0.691 0.937]	2.116	
$\rho_c$	0.838	0.876	0.946	0.368	0.020	0.145	[ 0.170 0.642]	-0.668	
$\rho_g$	0.943	0.972	0.945	0.792	0.004	0.075	[ 0.664 0.911]	1.421	
$\rho_L$	0.881	0.974	0.983	0.462	0.007	0.106	[ 0.284 0.636]	0.582	
$\rho_{inv}$	0.910	0.943	0.734	0.871	0.004	0.048	[ 0.782 0.935]	1.481	
S. D. of Shocks									
$\varepsilon_c$	0.407	0.24	0.125	0.077	0.002	0.015	[ 0.056 0.106]	-0.087	
$\varepsilon_{inv}$	0.113	0.059	1.045	0.046	0.001	0.014	[ 0.029 0.074]	0.573	
$\varepsilon_q$	0.613	7.000	4.047	0.114	0.001	0.017	[ 0.088 0.144]	0.888	
$\varepsilon_a$	0.639	0.343	0.595	0.110	0.002	0.025	[ 0.078 0.157]	0.444	
$\varepsilon_p$	0.165	0.172	0.205	0.245	0.018	0.104	[ 0.092 0.428]	0.477	
$\varepsilon_L$	3.818	2.351	2.352	0.074	0.000	0.005	[ 0.066 0.082]	0.941	
$\varepsilon_w$	0.297	0.246	0.294	0.079	0.003	0.022	[ 0.052 0.127]	-0.829	
$\varepsilon_g$	0.335	0.354	0.287	0.043	0.000	0.003	[ 0.038 0.048]	1.007	
$\varepsilon_m$	0.090	0.000	0.000	0.011	0.000	0.001	[ 0.010 0.012]	0.709	

## Table 2. Note

- ▶ SW denotes Smets and Wouters' (2003) model. OW denotes Onatski and Williams' (2010) model. LOWW denotes Levin, Onatski, Williams and Williams' (2006) model.
- ▶ \* indicates that it is the mean of  $\varphi$  instead of  $1/\varphi$ .
- ▶ The first 250,000 draws of MH algorithm are discarded to guarantee convergence and then the next 100,000 draws are used
- ▶ S.E. is computed using a Parzen window.
- ▶ CD is the convergence diagnostic statistics proposed by Geweke (1992).



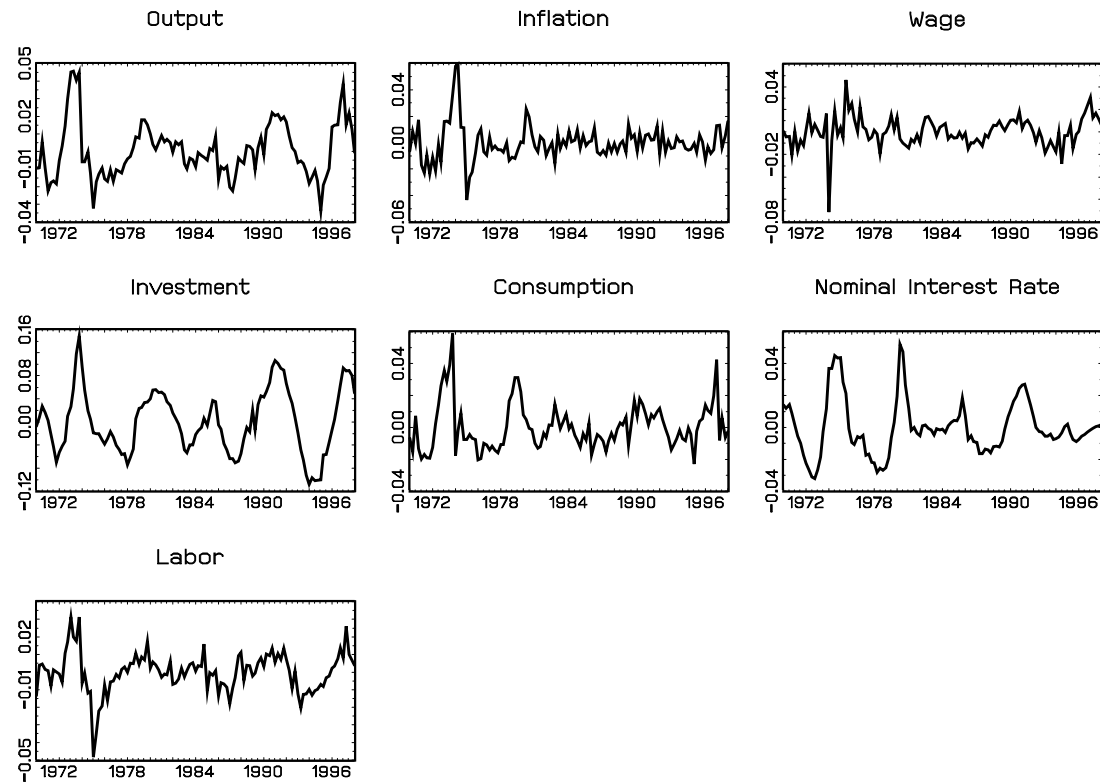


Figure 1. Data

Note: Series output: Real GDP per labour force, seasonally adjusted (unit is 1 million yen at 1990). Series consumption: Real consumption per labour force, s.a., (unit same as above). Series investment: Real investment per labour force, s.a., (unit same as above). Series Labor: Labour input index = (Work hour index\*Total Employment) / Labour Population. Series wage: Real wage index = Nominal wage index / GDP deflator. Series inflation: GDP deflator inflation rate (quarterly, annual rate, decadal demeaned). Series Nominal Interest Rate: Uncollateralized call rate (annual rate, decadal demeaned). Output, consumption, investment, labor and wage are transformed to their logarithms and then detrended using the Hodrick and Prescott (HP) filter. Nominal rate and inflation are detrended using HP filter without log-transformation. After those procedure, all above data are obtained by being demeaned.

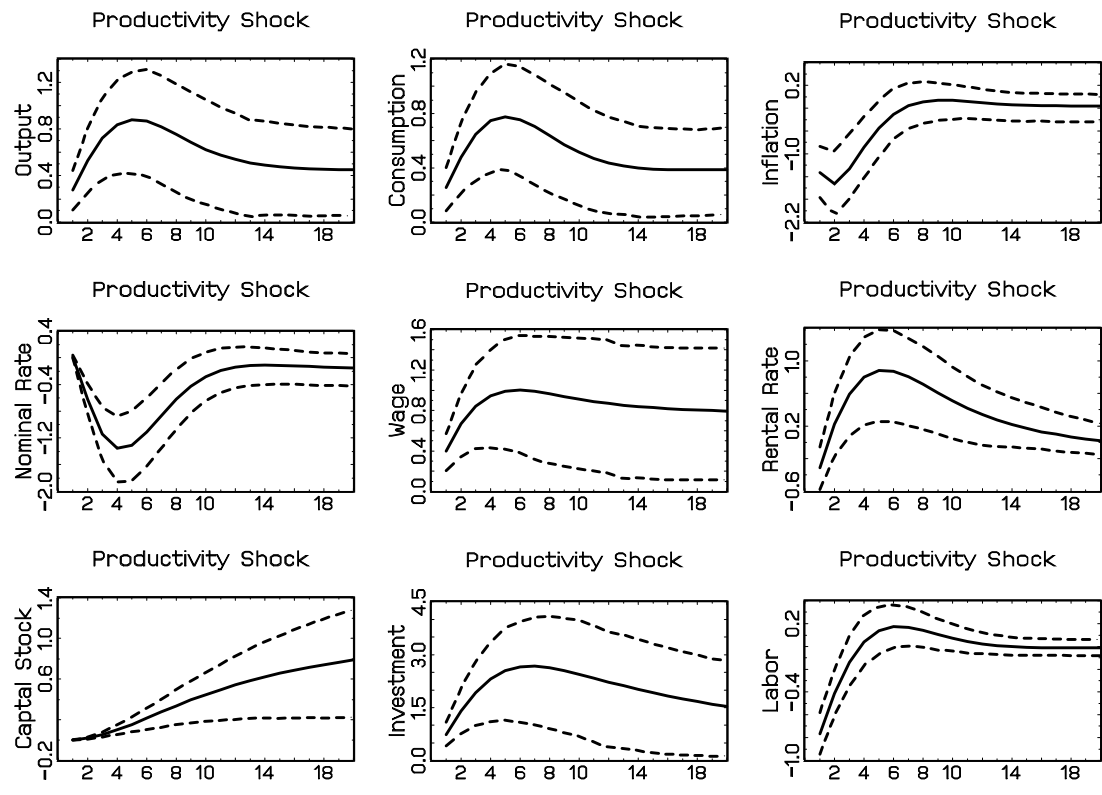


Figure 3A. Productivity Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

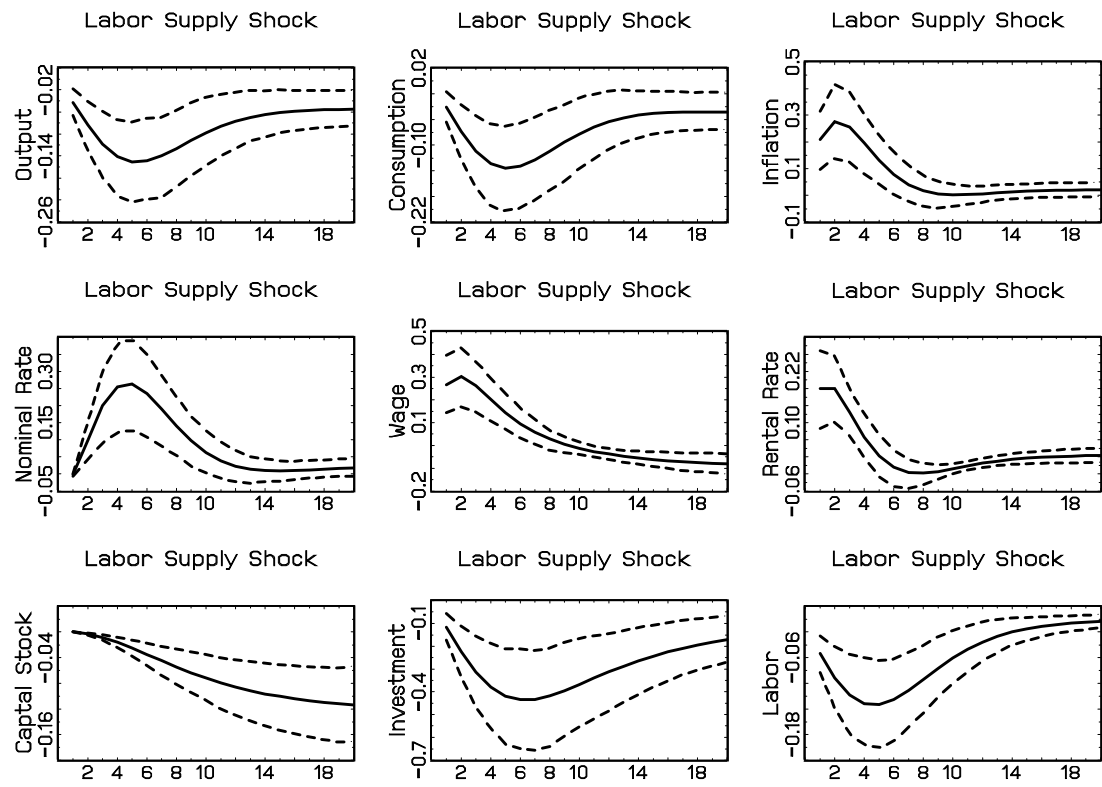


Figure 3B. Labor Supply Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

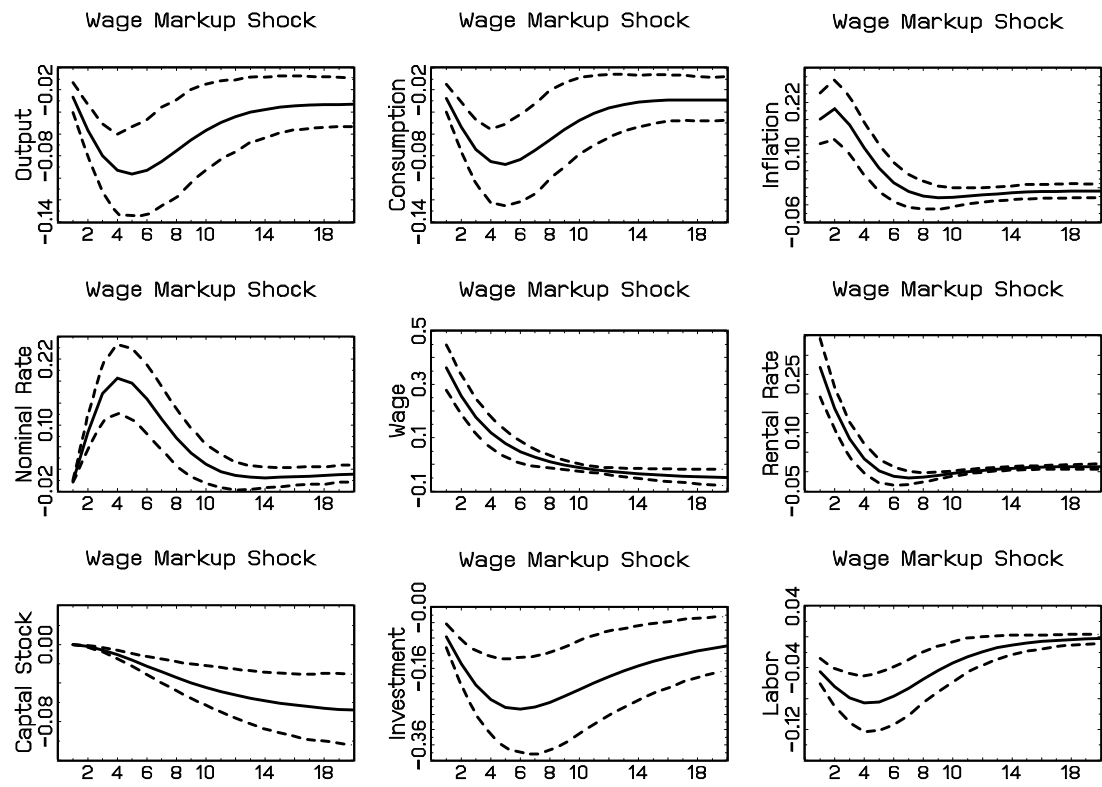


Figure 3C. Wage Markup Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

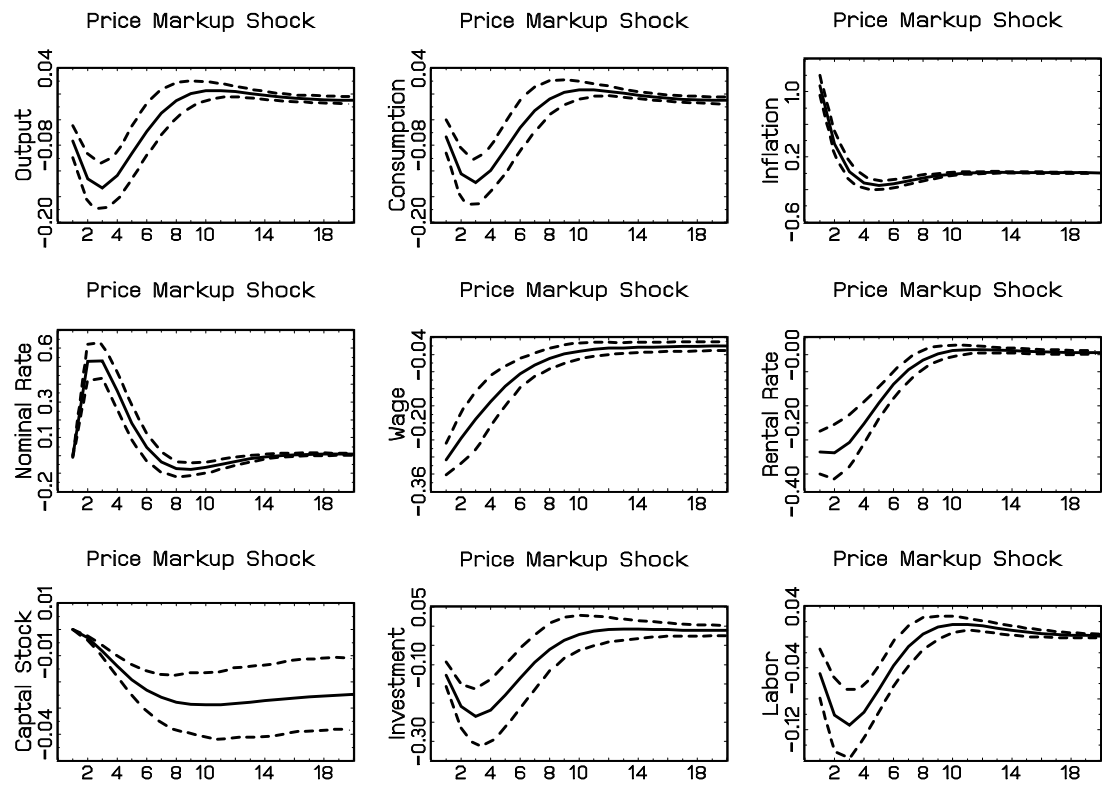


Figure 3D. Price Markup Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

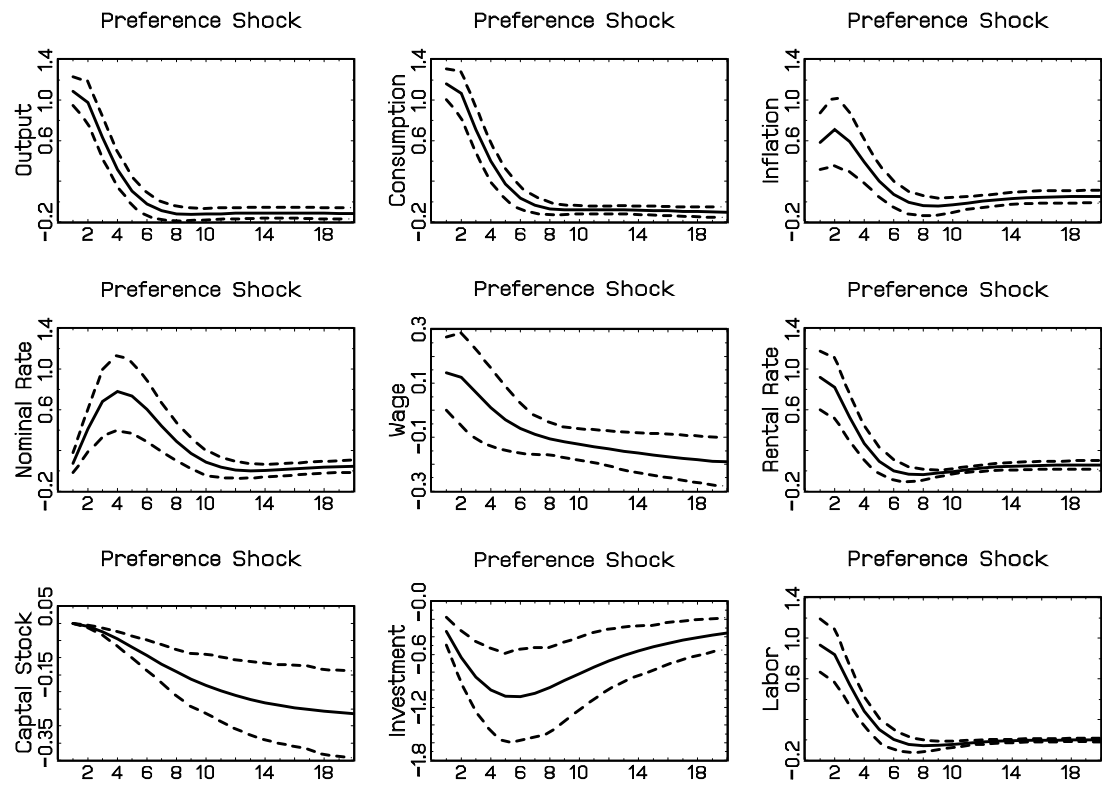


Figure 3E. Preference Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

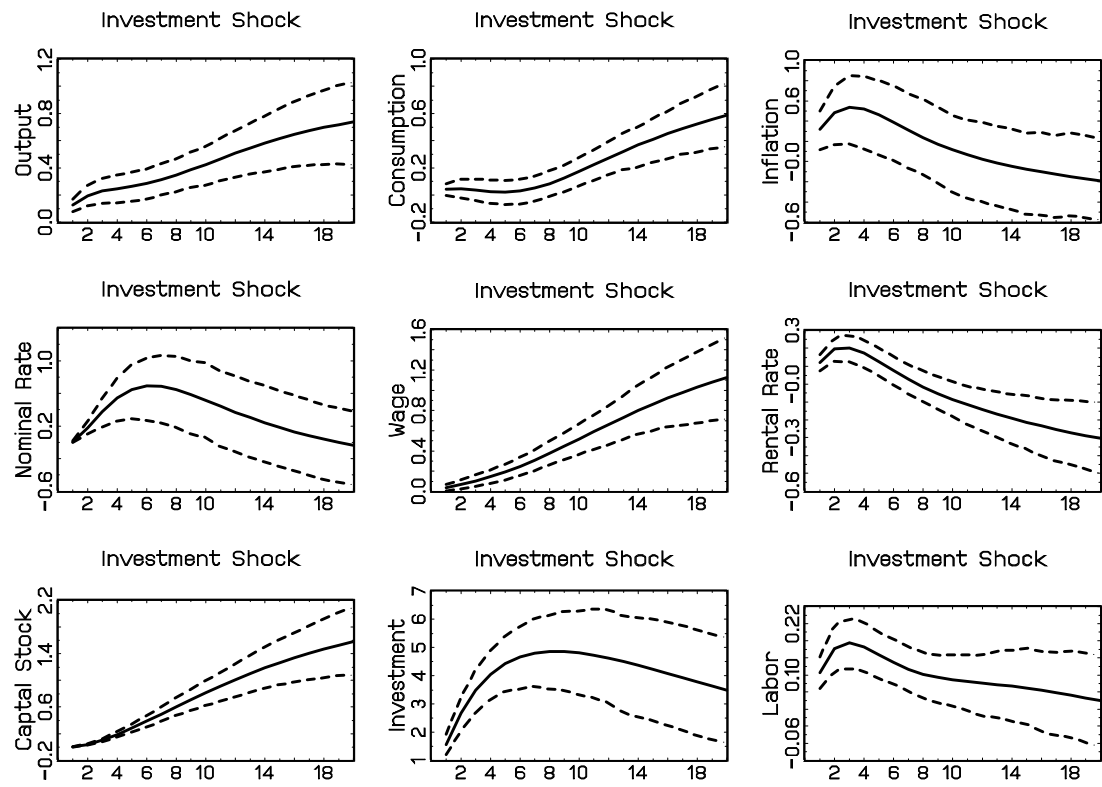


Figure 3F. Investment Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

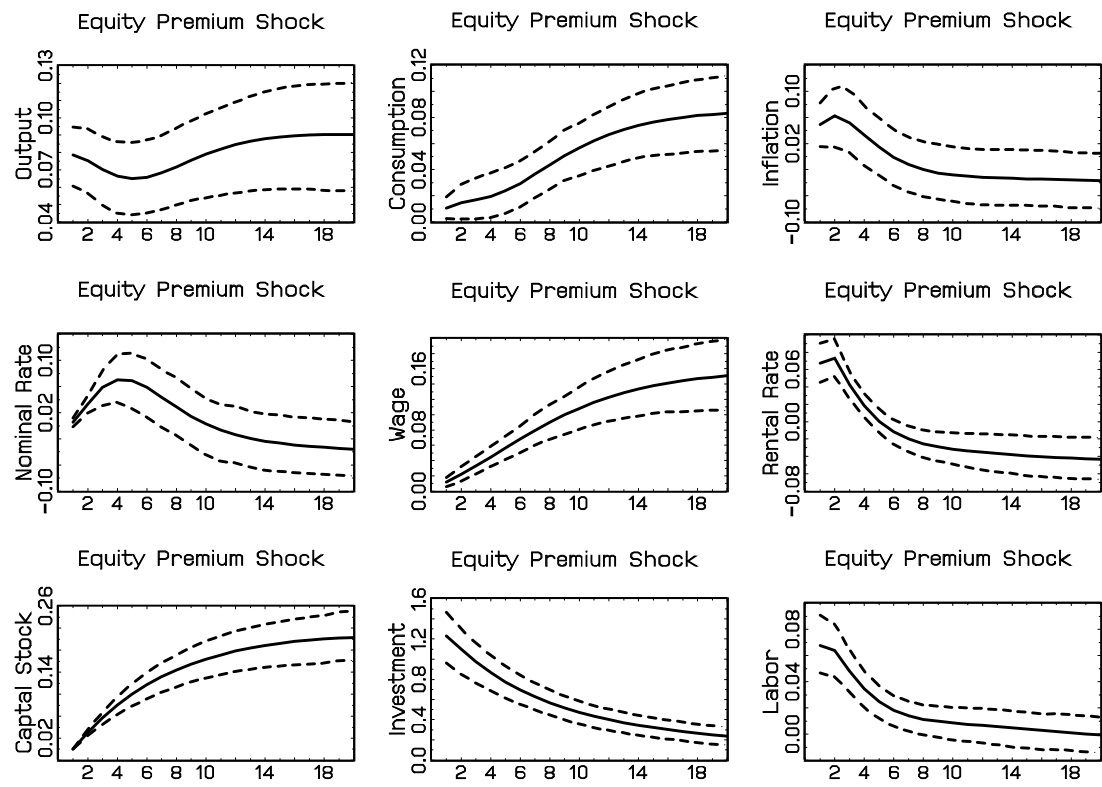


Figure 3G. Equity Premium Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.



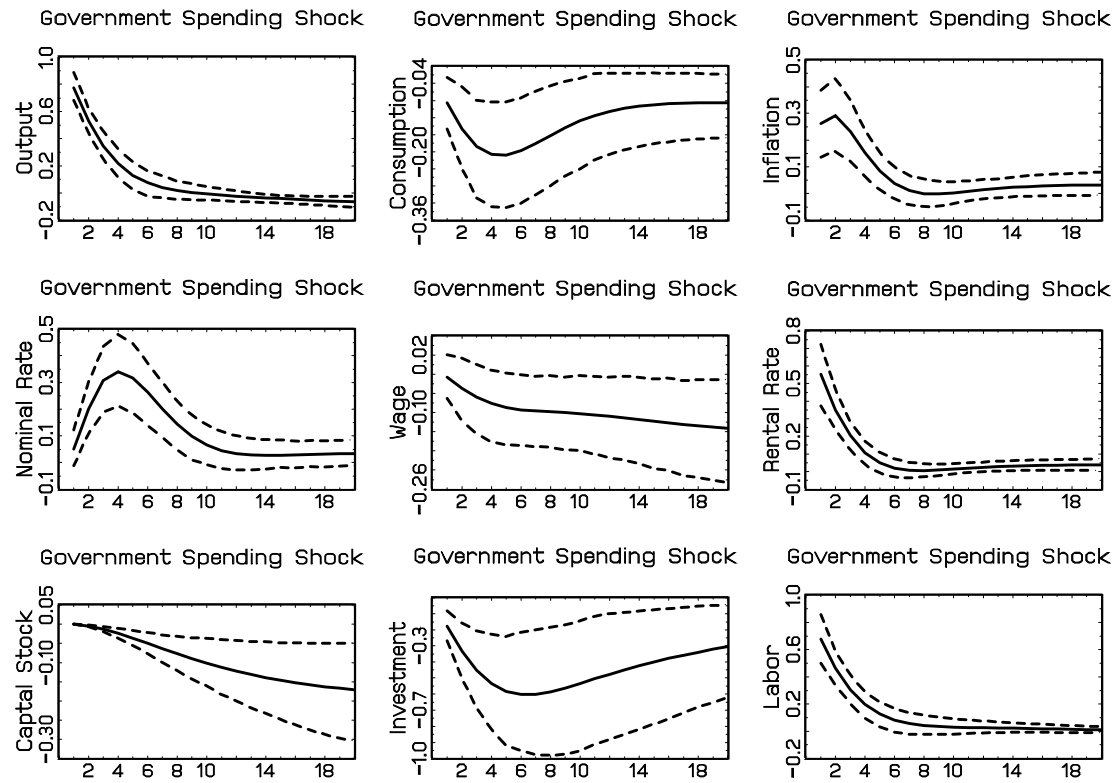


Figure 3H. Government Spending Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

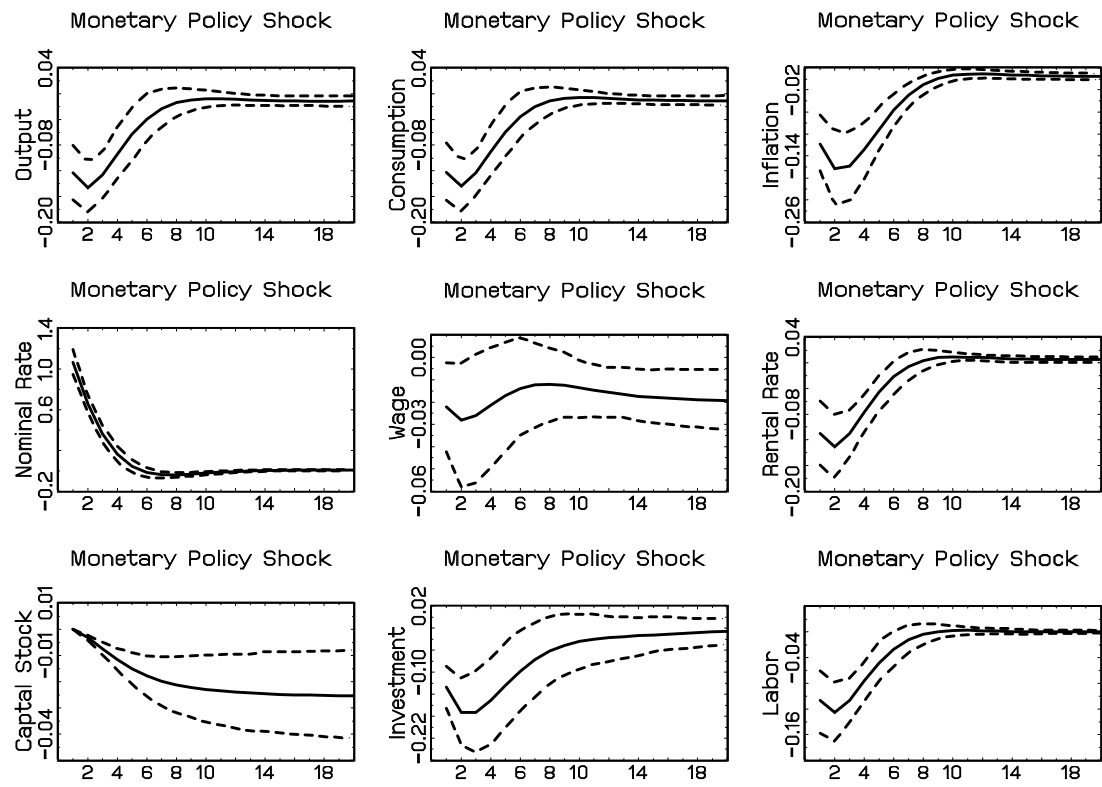


Figure 3I. Monetary Policy Shock

Note: The straight line plot the median response. The dash lines plot the 5th and the 95 percentiles of the response.

- (1) モデルの改良 (Sugo and Ueda (2008), Ichiue, Kurozumi and Sunakawa (2008))
- (2) ゼロ金利制約 (Eggertsson and Woodford (2003), Jung, Teranishi and Watanabe (2005), Adam and Billi (2007), Levin et al. (2010))
- (3) マルコフスイッチング DSGE モデル (Eo (2009), Farmer, Waggoner and Zha. (2009))
- (4) トレンド (Altig et al. (2010), Del Negro and Schorfheide (2004), Del Negro et al. (2006), Ajemian and Juillard (2009))
- (5) 事前分布 (Del Negro and Schorfheide (2008))
- (6) 識別 (Canova and Sala (2009), Iskrev (2010))
- (7) 最適金融政策 (Levin et al. (2006))

## 事後オッズ比

$$\frac{p(M_1|\text{data})}{p(M_2|\text{data})} = \frac{p(\text{data}|M_1)}{p(\text{data}|M_2)} \frac{p(M_1)}{p(M_2)}$$

- ▶  $p(\text{data}|M_1)/p(\text{data}|M_2)$ : ベイズ・ファクター
- ▶  $p(M_1)/p(M_2)$ : 事前オッズ比
- ▶  $p(\text{data}|M_1)$  or  $p(\text{data}|M_2)$ : 周辺尤度
- ▶  $p(\text{data}|M_1)/p(\text{data}|M_2) > 1$  であれば  $M_1$  を選択.
- ▶ どちらのモデルが正しいか事前情報が無い場合,  $p(M_1)/p(M_2) = 1$  とする.
- ▶ その場合,

$$\frac{p(M_1|\text{data})}{p(M_2|\text{data})} = \frac{p(\text{data}|M_1)}{p(\text{data}|M_2)}$$

となるので, 周辺尤度の高いモデルを選択する.

## 周辺尤度の修正調和平均推定量

- ▶ MCMC を用いた周辺尤度の計算にはいくつかの方法が提案されているが, DSGE や DSGE-VAR モデルの先行研究では, Geweke (1999) によって提案された修正調和平均推定量が用いられている (渡部 (2009)).

## 周辺尤度の修正調和平均推定量

- ▶  $g(\theta)$  を何らかの確率密度関数であるとする。そうすると、以下の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{g(\theta)}{f(\text{data}|\theta)f(\theta)} \right] &= \int \frac{g(\theta)}{f(\text{data}|\theta)f(\theta)} f(\theta|\text{data}) d\theta \\ &= \int \frac{g(\theta)}{f(\text{data}|\theta)f(\theta)} \frac{f(\text{data}|\theta)f(\theta)}{f(\text{data})} d\theta \\ &= \int \frac{g(\theta)}{f(\text{data})} d\theta \\ &= \frac{1}{f(\text{data})} \int g(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{f(\text{data})} \end{aligned}$$

## 周辺尤度の修正調和平均推定量

- ▶ したがって、周辺尤度は以下のように推定できる。

$$f(\text{data}) = \frac{1}{E \left[ \frac{g(\theta)}{f(\text{data}|\theta)f(\theta)} \right]} \approx \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(\theta_i)}{f(\text{data}|\theta_i)f(\theta_i)} \right]^{-1}$$

- ▶ Newton and Raftoy (1994) は、 $g(\theta) = f(\theta)$  とすることを提案している。そうすると、上の式は以下のように簡単になる。

$$f(\text{data}) \approx \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{f(\text{data}|\theta_i)} \right]^{-1}$$

- ▶ これは、周辺尤度の調和平均推定量と呼ばれる。しかし、 $f(\text{data}|\theta_i)$  が 0 に近くなることがあるので、そうすると値が不安定になる。

## 周辺尤度の修正調和平均推定量

- ▶ この問題を解消するために, Geweke (1999) は  $g(\theta)$  を以下の切断正規分布にした修正調和平均推定量を提案している.

$$g(\theta) = \tau^{-1} (2\pi)^{-k/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\theta - \mu)' \Sigma^{-1} (\theta - \mu) \right] \\ \times I \left[ (\theta - \mu)' \Sigma^{-1} (\theta - \mu) \leq F_{\chi_k^2}^{-1}(\tau) \right]$$

ここで,  $k$  は  $\theta$  の次元,  $F_{\chi_k^2}^{-1}(\tau)$  は自由度  $k$  の  $\chi^2$  分布の cdf の逆関数である. Geweke (1999) では,  $\mu$  と  $\Sigma$  を, それぞれ MCMC により事後分布からサンプリングされた  $\theta$  の標本平均と標本分散共分散行列にしている.  $I[\cdot]$  は括弧の中の不等式が満たされれば 1, 満たされなければ 0 となる指示関数である.



## DSGE vs VAR

- ▶ Smets and Wouters (2003) : CEE モデルと VAR の事後オッズ比より, CEE モデルと VAR モデルのフィットがほぼ同等であることを示した.
- ▶ Sims (2003) の批判:
  - (1) Lindley's (1957) Paradox (Shafer (1982))
  - (2) トレンドの除去
- ▶ Del Negro et al. (2006) :
  - (1) Smets and Wouters (2003) の結果は事前分布の選択や標本期間に依存する. → DSGE-VAR (Del Negro and Schorfheide (2004))
  - (2) トレンドの内生化 (Altig et al. (2010))

## VAR モデル

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \Phi_p \mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{u}_t$$
$$\mathbf{u}_t \sim \text{NID}(\mathbf{0}, \Sigma_u)$$

- ▶ VAR モデルの事前分布を DSGE モデルを用いて設定するのが, DSGE-VAR モデル.
- ▶ サンプル数を  $T$  とすると, DSGE モデルから発生させた  $\lambda T$  の人工的データに基づいて事前分布を設定.
- ▶ ただし, 実際には DSGE モデルからデータを発生させるわけではなく, 事前分布の中の標本モーメントを母集団のモーメントに置き換える.
- ▶  $\lambda$  を大きくすると DSGE モデルからの情報をより使うことになる.
- ▶ そこで,  $\lambda$  を変えて周辺尤度を計算することにより, DSGE モデルの情報がどの程度 VAR の推定に有用であるか分析できる.

## VAR モデル

- ▶ VAR モデルを以下のように表わす.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Phi + \mathbf{U}$$

- ▶  $\mathbf{y}_t, \mathbf{u}_t : n \times 1$  ベクトル
- ▶  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T]'$  ( $T \times n$ )
- ▶  $k = 1 + np$
- ▶  $\mathbf{x}_t = [1, \mathbf{y}'_{t-1}, \dots, \mathbf{y}'_{t-p}]'$  ( $k \times 1$ )
- ▶  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T]'$  ( $T \times k$ )
- ▶  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T]'$  ( $T \times n$ )
- ▶  $\Phi = [\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_p]'$  ( $k \times n$ )

## 事前分布

- ▶ パラメータ  $\theta$  の DSGE モデルから  $T^* = \lambda T$  の人工的データ  $\mathbf{Y}^*$  を発生させる.
- ▶ このデータを VAR モデルに当てはめたときの尤度は,

$$f(\mathbf{Y}^*(\theta) | \Phi, \Sigma_u) \\ \propto |\Sigma_u|^{-\lambda T/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Sigma_u^{-1} (\mathbf{Y}^{*'} \mathbf{Y}^* - \Phi' \mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^* \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{Y}^{*'} \mathbf{X}^* \Phi + \Phi' \mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^* \Phi) \right\} \right]$$

- ▶ ここで,  $\mathbf{Y}^{*'} \mathbf{Y}^*$ ,  $\mathbf{X}^{*'} \mathbf{Y}^*$ ,  $\mathbf{Y}^{*'} \mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{X}^{*'} \mathbf{X}^*$  をそれらの期待値  $\lambda T \Gamma_{yy}^*(\theta)$ ,  $\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta)$ ,  $\lambda T \Gamma_{yx}^*(\theta)$ ,  $\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)$  に置き換える.  
例えば,  $\Gamma_{xy}^*(\theta) = E_{\theta}[\mathbf{x}_t \mathbf{y}_t']$

## 事前分布

- ▶  $f(\Phi, \Sigma_u) \propto |\Sigma_u|^{-(n+1)/2}$  とすると,

$$\begin{aligned}
 & f(\Phi, \Sigma_u | \theta) \\
 &= \frac{f(\mathbf{Y}^*(\theta) | \Phi, \Sigma_u) f(\Phi, \Sigma_u)}{\int f(\mathbf{Y}^*(\theta) | \Phi, \Sigma_u) f(\Phi, \Sigma_u) d\Phi d\Sigma_u} \\
 &= c^{-1}(\theta) |\Sigma_u|^{-\frac{1}{2}(\lambda T + n + 1)} \exp \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \lambda T \Sigma_u^{-1} (\Gamma_{yy}^*(\theta) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \Phi' \Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta) \Phi + \Phi' \Gamma_{xx}^*(\theta) \Phi) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

## 事前分布

- ▶  $\lambda T \geq k + n$  で  $\Gamma_{xx}^*(\theta)$  の逆行列が存在すれば,

$$c(\theta) = (2\pi)^{nk/2} |\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)|^{-n/2} |\lambda T \Sigma_u^*(\theta)|^{-(\lambda T - k)/2} \\ \times 2^{-n(\lambda T - k)/2} \pi^{n(n-1)/4} \prod_{i=1}^n \Gamma[(\lambda T - k + 1 - i)/2]$$

## 事前分布

- ▶ 逆ウィッシュャート・正規事前分布

$$\Sigma_u | \theta \sim IW(\lambda T \Sigma_u^*(\theta), \lambda T - k, n)$$

$$\Phi | \Sigma_u, \theta \sim N(\Phi^*(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta))^{-1})$$

ここで,

$$\Phi^*(\theta) = \Gamma_{xx}^{*-1}(\theta) \Gamma_{xy}^*(\theta)$$

$$\Sigma_u^*(\theta) = \Gamma_{yy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta) \Gamma_{xx}^{*-1}(\theta) \Gamma_{xy}^*(\theta)$$



## 事後分布

- ▶  $f(\Phi, \Sigma_u | \theta, Y)$  も逆ウィッシュャート・正規分布になる.

$$\Sigma_u | Y, \theta \sim IW((\lambda + 1)T \tilde{\Sigma}_u(\theta), (\lambda + 1)T - k, n)$$

$$\Phi | Y, \Sigma_u, \theta \sim N(\tilde{\Phi}(\theta), \Sigma_u \otimes (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$$

ここで,

$$\tilde{\Phi}(\theta) = (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + \mathbf{Y}'\mathbf{Y})$$

$$\tilde{\Sigma}_u = \frac{1}{(\lambda + 1)T} \left\{ \lambda T \Gamma_{yy}^*(\theta) + \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - (\lambda T \Gamma_{yx}^*(\theta) + \mathbf{Y}'\mathbf{X}) \right. \\ \left. (\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\lambda T \Gamma_{xy}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{Y}) \right\}$$

## 事後分布

- ▶  $\theta$  の尤度

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{Y}|\theta) &= \frac{f(\mathbf{Y}|\Phi, \Sigma_u)f(\Phi, \Sigma_u|\theta)}{f(\Phi, \Sigma_u|\mathbf{Y})} \\
 &= \frac{|\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta) + \mathbf{X}'\mathbf{X}|^{-n/2} |(\lambda + 1) T \tilde{\Sigma}_u(\theta)|^{-\{(\lambda+1)T-k\}/2}}{|\lambda T \Gamma_{xx}^*(\theta)|^{-n/2} |\lambda T \Sigma_u^*(\theta)|^{-\{\lambda T-k\}/2}} \\
 &\quad \times \frac{(2\pi)^{-nT/2} 2^{n\{(\lambda+1)T-k\}/2} \prod_{i=1}^n \Gamma[\{(\lambda + 1)T - k + 1 - i\}/2]}{2^{n(\lambda T-k)/2} \prod_{i=1}^n \Gamma[\{\lambda T - k + 1 - i\}/2]}
 \end{aligned}$$

- ▶  $\theta$  の周辺事後密度

$$f(\theta|\mathbf{Y}) \propto f(\mathbf{Y}|\theta)f(\theta)$$

- ▶ 前と同様にランダム・ウォーク MH を使えば,  $f(\theta|Y)$  からサンプリングできる.
- ▶ 修正調和平均法を使えば, 周辺尤度  $f(Y)$  を計算できる.
- ▶  $f(\Phi, \Sigma_u, \theta|Y) = f(\Phi, \Sigma_u|\theta, Y)f(\theta|Y)$  なので,  $\Phi, \Sigma_u$  も事後分布から簡単にサンプリングできる.

## 参考文献

- ▶ Del Negro and Schorfheide (2004, 2006)
- ▶ Del Negro et al. (2006)
- ▶ An and Schorfheide (2007)
- ▶ 渡部 (2009)

Del Negro et al. (2006)

$$\Delta \mathbf{y}_t = \Phi_0 + \Phi_\beta (\beta' \mathbf{y}_{t-1}) + \Phi_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \Phi_\rho \Delta \mathbf{y}_{t-\rho} + \mathbf{u}_t$$
$$\mathbf{u}_t \sim \text{NID}(\mathbf{0}, \Sigma_u)$$

$$\Delta \mathbf{y}_t = [\Delta \ln Y_t, \Delta \ln C_t, \Delta \ln I_t, \ln L_t, \Delta \ln(W_t/P_t), \pi_t, R_t]'$$

$$\beta' \mathbf{y}_{t-1} = [\ln C_{t-1} - \ln Y_{t-1}, \ln I_{t-1} - \ln Y_{t-1}, \ln(W_{t-1}/P_{t-1}) - \ln Y_{t-1}]'$$

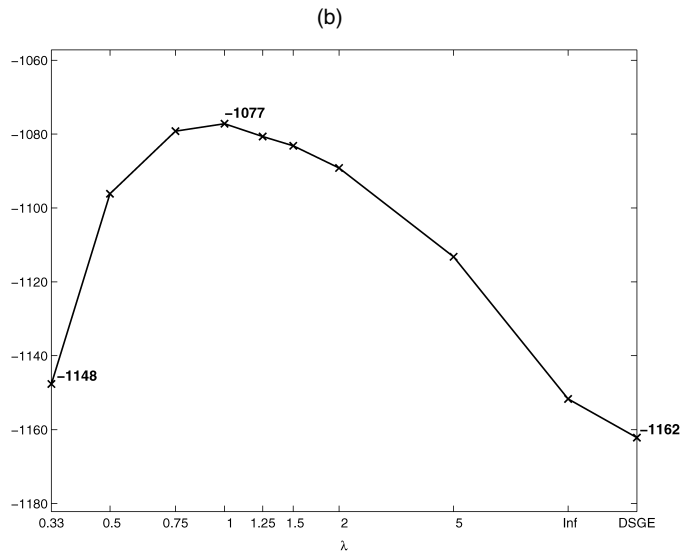
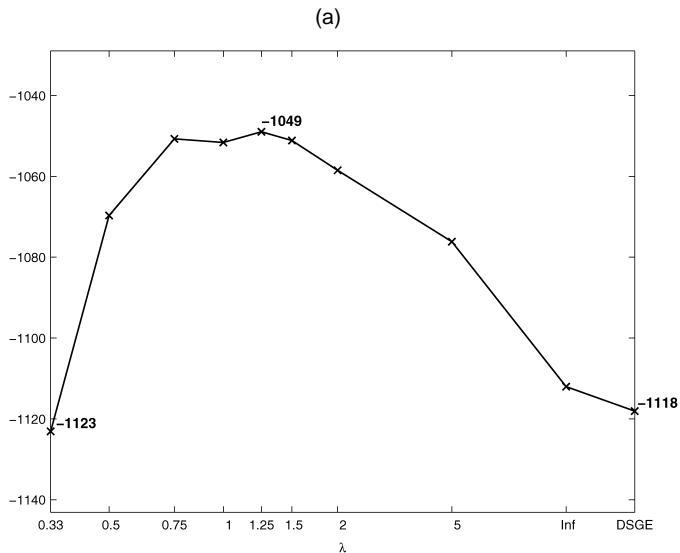


Figure 2. Marginal Likelihood as a Function of  $\lambda$ . (a) 30-year sample: QII:1974–QI:2004. (b) 30-year sample: QII:1970–QI:2000. The two panels depict the log-marginal likelihood function on the y-axis and the corresponding value of  $\lambda$ , rescaled between via the transformation  $\lambda/(1+\lambda)$ , on the x-axis. The right endpoint depicts the log-marginal likelihood for the state-space representation of the DSGE model.

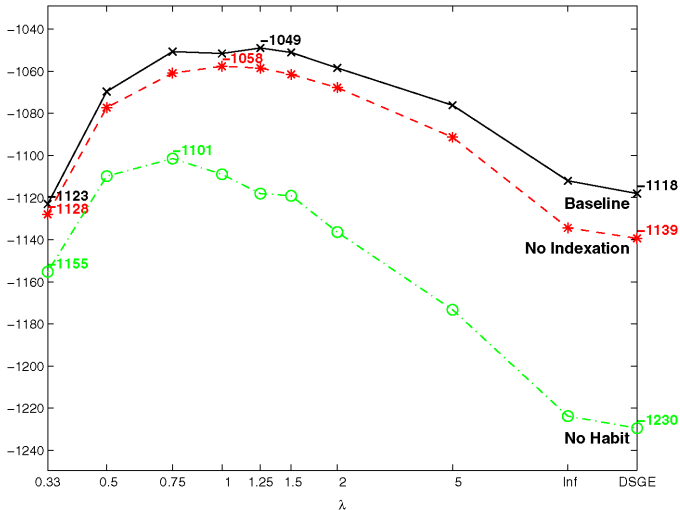


Figure 4. Marginal Likelihood as a Function of  $\lambda$ : Comparison Across Models. See Figure 2 for an explanation.

## 応用

- (1) モデル比較 (Del Negro et al. (2006))
- (2) 政策効果 (Del Negro et al. (2006), Del Negro and Schorfheide (2009))
- (3) 予測 (Del Negro and Schorfheide (2004), Del Negro et al. (2006))

岩田安晴 (2009) 「日本経済を対象とした推計 DSGE モデルにおける財政政策：非リカーディ案家計ですべて説明できるか？」 ESRI Discussion Paper Series No.216, 内閣府経済社会総合研究所.

小西貞則・越智義道・大森裕浩 (2008) 『計算統計学の方法-ブートストラップ、EM アルゴリズム、MCMC』朝倉書店.

中妻照雄 (2007) 『入門ベイズ統計学』朝倉書店.

矢野浩一 (2008) 「DYNARE による動学的確率的一般均衡シミュレーション～新ケインズ派マクロ経済モデルへの応用～」 ESRI Discussion Paper Series No.203, 内閣府経済社会総合研究所 .

和合肇編 (2005) 『ベイズ計量経済分析-マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』東洋経済新報社.



渡部敏明 (2009) 「DSGE-VAR モデルの日本のマクロデータへの応用」 ESRI Discussion Paper Series No.225-J, 内閣府 経済社会総合研究所.

Adam, K. and Billi, R. M. (2007), “Discretionary Monetary Policy and the Zero Lower Bound on Nominal Interest Rates,” *Journal of Monetary Economics*, **54**, 728–752.

Adjemian, S. and Juillard, M. (2009), “Dealing with Trends in DSGE Models. An Application to the Japanese Economy,” ESRI Discussion Paper Series No.224, Economic and Social Research Institute, Cabinet Office, Government of Japan.

Altig, D., Christiano, L., Eichenbaum, M. and Lindé, J. (2010), “Firm-Specific Capital, Nominal Rigidities, and Business Cycle,” *Review of Economic Dynamics*, in press.

An, S. and Schorfheide, F. (2007), “Bayesian Analysis of DSGE Models,” *Econometric Reviews*, **26**, 113–172.

Calvo, G. A. (1983), “Staggered Prices in Utility-Maximizing Framework,” *Journal of Monetary Economics*, **12**, 383–398.

Canova, F. (2007), *Methods for Applied Macroeconomic Research*, Princeton University Press.

Canova, F. and Sala, L. (2009), “Back to Square One: Identification Issues in DSGE Models,” *Journal of Monetary Economics*, **56**, 431–449.

Chib, S. and Greenberg, E. (1995), “Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm,” *American Statistician*, **49**, 327–335.

Chib, S. and Ramamurthy, S. (2010), “Tailored Randomized-Block MCMC Methods with Application to DSGE,” *Journal of Econometrics*, **155**, 19–38.

Christiano, L. J., Eichenbaum, M. and Evans, C. (2005), “Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary policy,” *Journal of Political Economy*, **113**, 1–45.

Dejong, D. N. and Dave, C. (2007), *Structural Macroeconometrics*, Princeton University Press.

Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2004), “Priors from General Equilibrium Models for VARs,” *International Economic Review*, **45**, 643–673.

Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2006), “How Good Is What You’ve Got? DSGE-VAR as a Toolkit for Evaluating DSGE Models,” *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, **91**, 21–37.

Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2008), “Forming Priors for DSGE Models (and How It Affects the Assessment of Nominal Rigidities),” *Journal of Monetary Economics*, **55**, 1191–1208.

Del Negro, M. and Schorfheide, F. (2009), “Monetary Policy Analysis with Potentially Misspecified Models,” *American Economic Review*, **99**, 1415–1450.

Del Negro, M., Schorfheide, F., Smets, F. and Wouters, R. (2006), “On the Fit of New Keynesian Models (with discussion),” *Journal of Business and Economic Statistics*, **25**, 123–162.

Durbin, J. and Koopman, S. J. (2001), *Time Series Analysis by State Space Models*, Oxford University Press, Oxford, UK.

Eggertsson, G. B. and Woodford, M. (2003), “The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy,” *Brookings Papers on Economic Activity*, **34**, 139–235.

Eo, Y. (2009), “Bayesian Analysis of DSGE Models with Regime Switching,” MPRA Paper 13910, University Library of Munich, Germany.

Farmer, R. E. A., Waggoner, D. F. and Zha, T. (2009), “Understanding Markov-Switching Rational Expectations Models,” *Journal of Economic Theory*, **144**, 1849–1867.

Fernández-Villaverde, J. (2009), “The Econometrics of DSGE Models,” NBER Working Paper No.14677.

Geweke, J. (1992), “Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments. in J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith (eds.) *Bayesian Statistics 4*, Oxford University Press, Oxford, UK.

Geweke, J. (1999), “Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development and Communication,” *Econometric Reviews*, **18**, 1–126.

Geweke, J. (2010), *Complete and Incomplete Econometric Models*, Princeton University Press.

Harvey, A. C. (1989), *Forecasting Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Ichieue, H., Kurozumi, T. and Sunakawa, T. (2008), “Inflation Dynamics and Labor Adjustments in Japan: A Bayesian Approach,” Bank of Japan Working Paper Series No.08-E-9.

Iiboshi, H., Nishiyama, S. and Watanabe, T. (2006), “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Japanese Economy: A Bayesian Analysis,” mimeo.

Iskrev, N. (2010), “Local Identification in DSGE Models,” *Journal of Monetary Economics*, 57, 189–202.



Jung, T., Teranishi, Y. and Watanabe, T. (2005), “Optimal Monetary Policy at the Zero-Interest-Rate Bound,” *Journal of Money, Credit and Banking*, **37**, 813–835.

Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1999), *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, MIT Press.

Kydland, F. and Prescott, E. (1982), “Time to Build and Aggregate Fluctuations,” *Econometrica*, **50**, 1345–1371.

Levin, A., Lopez-Salido, D., Nelson, E. and Yun, T. (2010), “Limitations on the Effectiveness of Forward Guidance at the Zero Lower Bound,” *International Journal of Central Banking*, **6**, 143–189.

Levin, A., Onatski, A., Williams, J. and Williams, N. (2006), “Monetary Policy under Uncertainty in Micro-Founded Macroeconometric Models,” M. Gertler and K. Rogoff (eds.) *NBER Macroeconomic Annual 2005*, **20**, 229–287, MIT Press.

Lindley, D. V. (1957), “A Statistical Paradox,” *Biometrika*, **44**, 187–192.

Lubik, T. A. and Schorfheide, F. (2004), “Testing for Indeterminacy: An Application to U.S. Monetary Policy,” *American Economic Review*, **94**, 190-217

- Newton, M. A. and Raftery, A. E. (1994), “Approximate Bayesian Inference with the Weighted Likelihood Bootstrap,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **56**, 3–48.
- Onatski, A. and Williams, N. (2010), “Empirical and Policy Performance of a Forward-Looking Monetary Model,” *Journal of Applied Econometrics*, **25**, 145–176.
- Pytlarczyk, E. (2007), *Construction and Bayesian Estimation of DSGE Models for the EURO Area—A Statistical Framework*, VDM Verlag.
- Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2007), “Coupling and Ergodicity of Adaptive Markov Chain Monte Carlo Algorithms,” *Journal of Applied Probability*, **44**, 458-475.

Roberts, G. O. and Rosenthal, J. S. (2009), “Examples of adaptive MCMC,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **18**, 349–367.

Rosenthal, J. S. (2010), “Optimal Proposal Distributions and Adaptive MCMC,” in Brooks, S., Gelman, A., Jones, G. and Meng, X.-L. (eds), *MCMC Handbook*, in press.

Shafer, G. (1982), “Lindley’s Paradox,” *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 325–334.

Sims, C. (2002), “Solving Linear Rational Expectations Models,” *Computational Economics*, **20**, 1–20.

Sims, C. (2003), “Comments on Smets and Wouters,”  
<http://sims.princeton.edu/yftp/Ottawa/SWcommentSlides.pdf>

Smets, F. and Wouters, R. (2003), “An Estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium Model of the Euro Area,” *Journal of the European Economic Association*, **1**, 1123–1175.

Sugo, T. and Ueda, K. (2008), “Estimating a Dynamic Stochastic General Equilibrium Model for Japan,” *Journal of the Japanese and International Economies*, **22**, 476–502.